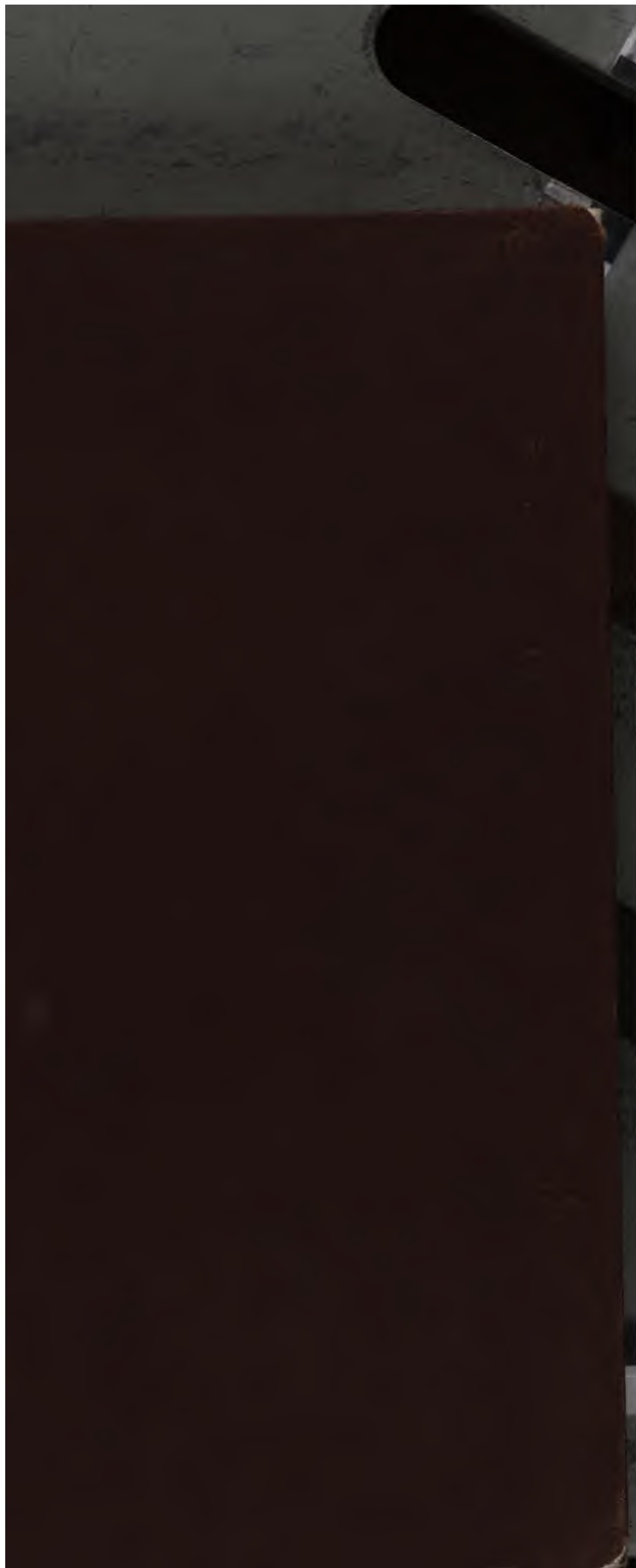
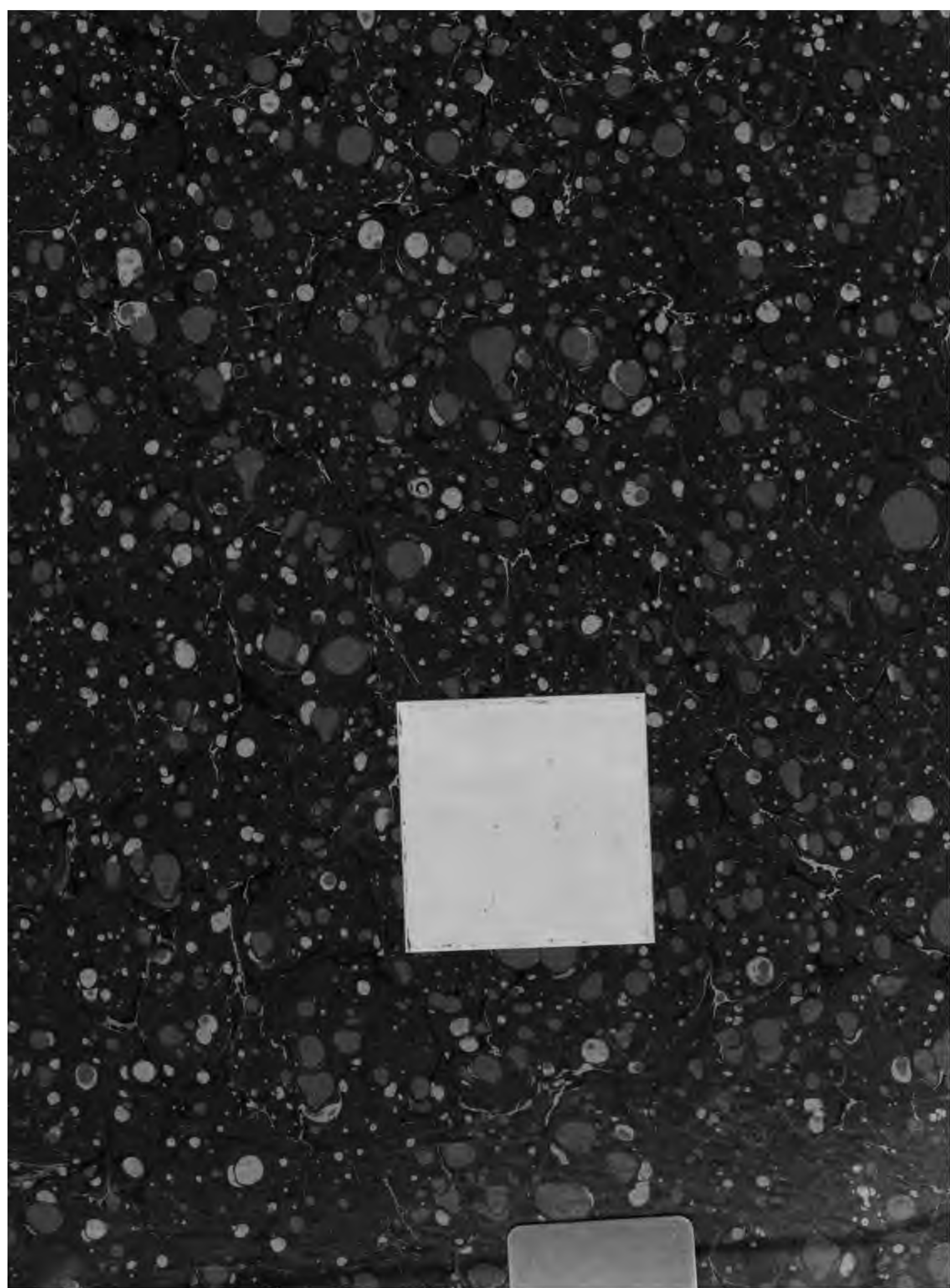
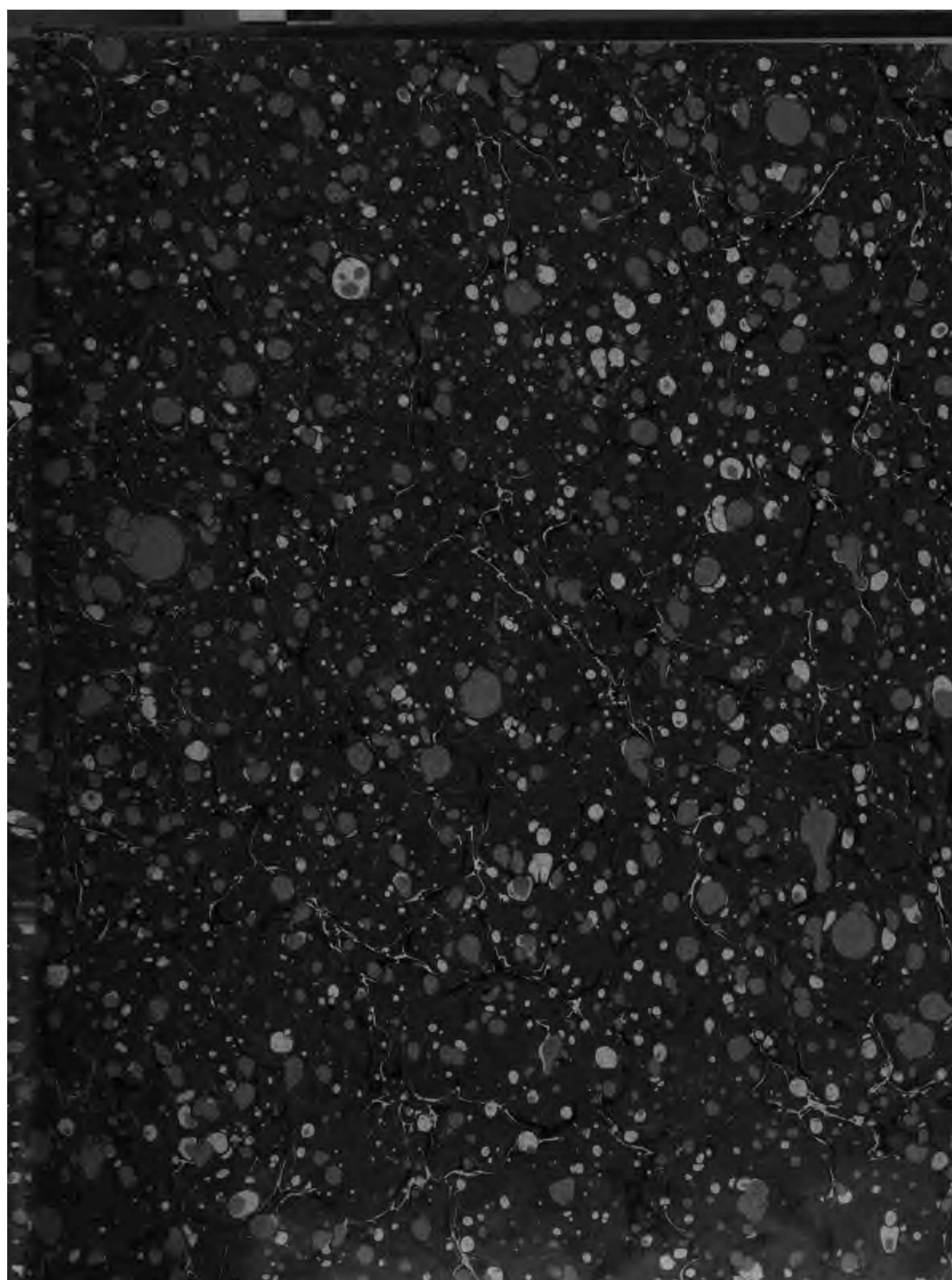






ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

27

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1903.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUISFERDINANDSTRASSE 2.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON | JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

27

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1903.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

REDACTION

NIELS HENRIK ABEL

IN MEMORIAM

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 27. — 1903. — TOME 27.

Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.

SUR LES FONCTIONS QUI ADMETTENT UN THÉORÈME D'ADDITION

PAR

PAUL PAINLEVÉ

à PARIS.

1. Comme point de départ de sa doctrine des fonctions elliptiques, WEIERSTRASS a pris le théorème suivant: *Toute fonction* $x = \varphi(u)$ *qui admet un théorème d'addition se ramène algébriquement à une fonction uniforme, méromorphe et doublement périodique de* u, *ou à une dégénérescence d'une telle fonction.* Autrement dit, $\varphi(u)$ est une fonction algébrique de $\wp(u, g_2, g_3)$ ou de e^{gu} ou de u.

En tête de sa théorie des fonctions abéliennes, WEIERSTRASS a inscrit une proposition analogue:

Tout système de n fonctions (indépendantes[1]) *à n variables qui admet un théorème d'addition est une combinaison algébrique de n fonctions abéliennes (ou dégénérescences) à n arguments et aux mêmes périodes.*

Cette proposition, qui a été souvent invoquée par les élèves de WEIERSTRASS, n'a pas seulement une importance considérable dans la théorie des fonctions abéliennes; elle intervient encore dans de nombreuses questions intéressant les surfaces algébriques, les équations différentielles, etc.

Malheureusement, la démonstration de l'illustre géomètre allemand n'a été ni enseignée[2] ni publiée; il n'en subsiste aucune trace dans ses manuscrits; elle est aujourd'hui perdue.

---

[1] J'entends par là que les n fonctions ne sont liées par aucune relation identique.

[2] Dans le seul de ses cours (cours manuscrit) où il soit fait allusion à cette démonstration, WEIERSTRASS précise le théorème et annonce qu'il l'établira dans les leçons suivantes. Mais le manuscrit porte alors que WEIERSTRASS, malade, a interrompu son cours; quand il le reprend quelques semaines plus tard, il poursuit le développement de la théorie des fonctions abéliennes, sans revenir sur le théorème en question.

L'importance et la beauté de ce théorème rendaient bien désirable qu'il fût enfin établi. Mais, si, dans le cas d'une variable indépendante, la démonstration en est aisée, elle présente, dès que le nombre des variables est égal à 2, de très profondes difficultés. Celle que j'ai développée dans mes leçons de Stockholm (pages 292—340) est rigoureuse, mais longue et compliquée; depuis lors, sans en changer le principe, je suis parvenu à l'alléger très notablement. C'est cette démonstration, sous sa forme nouvelle, qui fait l'objet du présent mémoire. J'espère qu'elle paraîtra claire et élémentaire. Je ne crois pas d'ailleurs qu'elle soit susceptible de simplifications importantes.

2. *Enoncé du théorème d'addition.* Je commencerai par préciser l'énoncé même du théorème.

D'après la définition de WEIERSTRASS, un système de deux fonctions (*indépendantes*) de deux variables, soit $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, admet ***un théorème d'addition***, si les valeurs de x, y pour $u = u_0 + u_1$, $v = v_0 + v_1$, s'expriment *algébriquement* à l'aide des valeurs (x_0, y_0) et (x_1, y_1) de (x, y) pour $u = u_0$, $v = v_0$ d'une part, et $u = u_1$, $v = v_1$ d'autre part.

D'une façon plus explicite, les fonctions $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ étant quelconques, si on pose

$$x = \varphi(u_0 + u_1, v_0 + v_1), \qquad y = \psi(u_0 + u_1, v_0 + v_1),$$

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \qquad y_0 = \psi(u_0, v_0),$$

$$x_1 = \varphi(u_1, v_1), \qquad y_1 = \psi(u_1, v_1),$$

il est loisible de tirer u_0, v_0, u_1, v_1 des quatre dernières équations et de porter dans les deux premières. Soit:

$$x = A(x_0, y_0, x_1, y_1), \qquad y = B(x_0, y_0, x_1, y_1)$$

les expressions ainsi trouvées. Le couple de fonctions $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ admet un théorème d'addition si A et B sont *algébriques* en x_0, y_0, x_1, y_1.

La définition est la même pour n fonctions de n variables.

3. *Rappel de quelques propriétés des fonctions abéliennes.* Considérons un système de $(n + 1)$ séries θ à n arguments $u_1, \ldots, u_n$ et aux mêmes périodes (d'ailleurs arbitraires). Les quotients de n de ces séries θ par la

$(n+1)^e$ définissent n fonctions à n variables, méromorphes et $2n$ fois périodiques, et on peut toujours choisir les séries θ de manière que ces n fonctions $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)$, soient indépendantes. Ces n fonctions (où on a au préalable effectué sur les u une substitution linéaire *quelconque*) formeront, par définition, *un système fondamental de fonctions abéliennes*[1] à n variables; les périodes y sont laissées quelconques;[2] quand on les choisit telles que le nombre des systèmes (distincts) de périodes soit moindre que $2n$, les fonctions $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)$ forment un système de fonctions abéliennes *dégénéré*.

Toute fonction méromorphe $X(u_1, \ldots, u_n)$ à $2n$ systèmes de périodes *distincts* s'exprime *algébriquement* à l'aide des fonctions $x_1, \ldots, x_n$ d'un système de fonctions abéliennes aux mêmes périodes. C'est ce qui résulte des travaux de WEIERSTRASS, de MM. PICARD, POINCARÉ et (dans le cas de deux variables) d'une belle méthode synthétique de M. APPELL.[3]

On sait enfin que tout système de fonctions abéliennes (dégénéré ou non) admet *un théorème d'addition* et qu'il vérifie un système différentiel de la forme:

$$(1) \quad du_i = P_i(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + Q_i(x_1, \ldots, x_n)dx_2 + \ldots + T_i(x_1, \ldots, x_n)dx_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $P_i, \ldots, T_i$ sont algébriques en $x_1, \ldots, x_n$, et où les seconds membres sont des différentielles totales exactes. Si les fonctions abéliennes forment un système fondamental à périodes quelconques, le système (1) dépend algébriquement d'un nombre de constantes (*modules*) égal au nombre des périodes *arbitraires*. Pour des valeurs arbitraires de ces modules, les n intégrales $\int P_i dx_1 + Q_i dx_2 + \ldots + T_i dx_n$ admettent $2n$ systèmes de périodes *distincts;* pour des valeurs exceptionnelles des modules, ce nombre s'abaisse et les fonctions correspondantes $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)$ sont des fonctions abéliennes *dégénérées*.

---

[1] On sait que, pour $n \geq 4$, ces fonctions sont plus générales que celles qui sont définies par l'inversion jacobienne dans la théorie des courbes algébriques.

[2] Ces périodes satisfont toujours aux conditions classiques de RIEMANN.

[3] J'ai fait connaître récemment une démonstration très directe et très élémentaire de ce théorème (Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 14 avril 1902).

Ces remarques faites, le théorème de WEIERSTRASS prend la forme précise qui suit:

Si n fonctions de n variables admettent un théorème d'addition, ce sont des combinaisons algébriques des n fonctions d'un système fondamental de fonctions abéliennes (dégénéré ou non).

Pour abréger, je développerai la démonstration du théorème dans le cas de deux variables. Mais elle s'étend d'elle-même à un nombre quelconque de variables.

4. *Cas de deux variables.* Dans le cas de deux variables u, v, les systèmes dégénérés de fonctions abéliennes peuvent (moyennant une substitution linéaire convenable effectuée sur u, v) recevoir la forme suivante, ainsi qu'il ressort de la dégénérescence des séries θ (à deux arguments):

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \wp(u), & y = e^{v}\dfrac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)}, \quad (a \text{ c}^{\text{te}} \text{ arbitraire}) \\ x = \wp(u), & y = v + \varepsilon\zeta(u), \quad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1) \\ x = e^{u}, & y = e^{v}, \\ x = u, & y = e^{v}, \\ x = u, & y = v. \end{cases}$$

On sait d'ailleurs que les fonctions abéliennes de deux variables se confondent avec les fonctions hyperelliptiques de genre 2. Autrement dit, on peut prendre, comme couple fondamental de fonctions abéliennes $x(u, v)$, $y(u, v)$, les fonctions:

$$x = \xi + \eta, \qquad y = \xi\eta,$$

où ξ, η vérifient le système:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \dfrac{d\eta}{\sqrt{R(\eta)}} = du, \\ \dfrac{\xi d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \dfrac{\eta d\eta}{\sqrt{R(\eta)}} = dv, \end{cases} \qquad R(\xi) \equiv a_5\xi^5 + a_4\xi^4 + \ldots + a_0.$$

Le théorème de WEIERSTRASS, dans le cas de deux variables, se laisse donc énoncer ainsi:

Si un couple de fonctions $X(u, v)$, $Y(u, v)$ admet un théorème d'addition, X et Y sont des combinaisons algébriques soit de deux fonctions hyper-

elliptiques non dégénérées (aux mêmes périodes), soit d'un des couples x, y définis par le tableau (2), *où les arguments u, v ont subi une transformation linéaire convenable.*

Rappelons enfin que les fonctions hyperelliptiques définies par (3) dégénèrent dans le cas (et seulement dans le cas) où $R(\xi)$ a des racines égales ou est de degré inférieur à 5.[1]

Introduction d'un système de différentielles totales.

5. Je vais établir maintenant la relation étroite qui existe entre le théorème de Weierstrass et le problème de l'inversion des systèmes de différentielles totales (algébriques).

Soit $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ un couple de fonctions analytiques[2] indépendantes qui admet un théorème d'addition, et soit:

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi(u + u_0, v + v_0), & y &= \psi(u + u_0, v + v_0), \\ x_0 &= \varphi(u_0, v_0), & y_0 &= \psi(u_0, v_0). \end{aligned}$$

On a:

$$(5) \qquad x = A(x_0, y_0, u, v), \qquad y = B(x_0, y_0, u, v),$$

A et B désignant des fonctions algébriques de x_0, y_0. Si, entre les égalités (5) et les égalités:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = A'_u, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = A'_v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = B'_u, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = B'_v,$$

on élimine x_0, y_0, on forme un système différentiel:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = p(x, y, u, v), & \dfrac{\partial x}{\partial v} = q(x, y, u, v), \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} = p_1(x, y, u, v), & \dfrac{\partial y}{\partial v} = q_1(x, y, u, v), \end{cases}$$

[1] Voir les nos 36—37.

[2] Il n'est pas nécessaire de supposer les fonctions *analytiques*. Si $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ sont des fonctions continues, à dérivées premières continues, des variables réelles (u, v), et admettent (pour u, v, u_0, v_0 réels) un théorème d'addition, elles sont sûrement analytiques, d'après le raisonnement même qui suit.

où p, q, p_1, q_1 sont *algébriques* en x, y, et dont l'intégrale générale est donnée par (5). Mais, d'autre part, on serait parvenu au même système (6) en éliminant u_0, v_0, et par suite u, v, entre les équations (4) et les équations dérivées $\frac{\partial x}{\partial u} = \varphi'_u(u + u_0, v + v_0)$, etc. Les fonctions p, q, p_1, q_1, sont donc *indépendantes de* u, v. Comme enfin, du système (6), on peut tirer $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, à savoir: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}$, etc., il est loisible de donner à ce système la forme:

$$(7) \quad du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \qquad dv = P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy,$$

où les seconds membres sont des *différentielles totales* exactes (*algébriques*).

Inversement, donnons-nous *a priori* un tel système (7), et supposons que *l'intégrale générale* $x(u, v), y(u, v)$ *de ce système dépende algébriquement des deux constantes d'intégration, soit* a, b. Il est clair que les fonctions $x(u, v), y(u, v)$ admettent un théorème d'addition. Substituons, en effet, à a, b les valeurs x_0, y_0 de x, y pour $u = 0$, $v = 0$, valeurs qui dépendent algébriquement de a, b; nous avons:

$$x = A(x_0, y_0, u, v), \qquad y = B(x_0, y_0, u, v),$$

A et B étant algébriques en x_0, y_0. Mais d'autre part si $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ est une solution particulière du système (7), l'intégrale générale est donnée par $x = \varphi(u + u_0, v + v_0)$, $y = \psi(u + u_0, v + v_0)$; d'où il suit (en remarquant que u, v et u_0, v_0 jouent un rôle symétrique) que les fonctions φ, ψ admettent un théorème d'addition.[1]

D'après cela, le théorème de Weierstrass peut être remplacé par le suivant: *quand l'intégrale générale* $x(u, v), y(u, v)$ *d'un système* (7) *dépend algébriquement des constantes initiales* x_0, y_0, *ces fonctions se ramènent algébriquement à un couple de fonctions hyperelliptiques* (*aux mêmes périodes*), *dégénéré ou non.*

[1] Il est clair d'après cela que si $x(u, v), y(u, v)$ admettent un théoréme d'addition, il en va de même pour les fonctions obtenues en effectuant sur u, v une substitution linéaire.

6. *Substitution au théorème de Weierstrass d'un théorème équivalent.* Précisons encore cette équivalence. Puisque la fonction $x(u, v)$ dépend algébriquement des constantes x_0, y_0, elle vérifie une relation:

$$x^n + R_{n-1}(x_0, y_0, u, v)x^{n-1} + \ldots + R_0(x_0, y_0, u, v) = 0$$

où les R sont *rationnels* en x_0, y_0, analytiques en u, v. Je dis que les R sont des fonctions *méromorphes* de u, v. En effet, supposons que les R admettent une singularité *non polaire* $u = \alpha$, $v = \beta$; ce sera une singularité d'une quelconque des fonctions $x(u, v)$ définies par le système (7); la fonction $x = \varphi(u + u_0, v + v_0)$ admettrait donc, quels que fussent u_0, v_0, la singularité fixe $u = \alpha$, $v = \beta$, ce qui est absurde.

La fonction $x(u, v)$ est donc une fonction à un nombre fini, soit m, de branches ($m \leqq n$); si $x_1, x_2, \ldots, x_m$ désignent ses m branches, posons:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= x_1(u + u_0, v + v_0) + \ldots + x_m(u + u_0, v + v_0)\\ &\equiv x_1(x_0, y_0, u, v) \quad + \ldots + x_m(x_0, y_0, u, v);\end{aligned}$$

ρ_1 est une fonction *méromorphe* des u, v qui dépend des deux constantes arbitraires x_0, y_0 (ou u_0, v_0) et peut recevoir les deux formes:

$$\rho_1 = F(x_0, y_0, u, v) = G(u + u_0, v + v_0),$$

F dépendant algébriquement de x_0, y_0.

La même remarque s'applique aux autres fonctions symétriques de $x_1, \ldots, x_m$,

$$\rho_2 = \sum x_1 x_2, \ldots, \rho_m = x_1 x_2 \ldots x_m,$$

ainsi qu'aux fonctions symétriques analogues $r_i(x_0, y_0, u, v)$ des branches de $y(u, v)$. Parmi ces fonctions symétriques ρ_j, r_i, il y en a deux au moins, soit $X(x_0, y_0, u, v)$ et $Y(x_0, y_0, u, v)$, qui sont deux fonctions *distinctes*[1] de x_0, y_0. Si, entre x, y, X, Y, on élimine x_0, y_0, on voit que x, y se trouvent exprimés algébriquement à l'aide de X, Y, les variables u, v figurant analytiquement. Mais on serait arrivé aux mêmes expressions en éliminant u_0, v_0 (c'est à dire $u + u_0, v + v_0$) entre x, y, X, Y: il suit de là que x et y d'expriment algébriquement à l'aide de X, Y, sans que u, v figurent.

[1] Autrement, x et y ne dépendraient que d'une *seule* constante arbitraire.

Moyennant une transformation *algébrique* convenable effectuée sur x, y, *il est donc loisible de supposer que les fonctions* $x(u, v)$, $y(u, v)$ *sont uniformes et méromorphes.*

7. Enfin, dans les équations (7), on peut, comme il est bien connu, exprimer *rationnellement* P, Q, P_1, Q_1 à l'aide de x, y et d'une irrationnelle unique $z(x, y)$, définie par une relation algébrique

$$S(x, y, z) = 0, \tag{8}$$

cela de telle façon qu'inversement z s'exprime rationnellement en x, y, P, Q, P_1, Q_1. Comme P ou $\frac{\partial u}{\partial x}$ se déduit rationnellement de $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$, ainsi que Q, P_1, Q_1, la fonction $z(u, v)$ est uniforme et méromorphe en même temps que $x(u, v), y(u, v)$. De plus, soit x_0, y_0, z_0 les valeurs de x, y, z pour $u = 0$, $v = 0$, valeurs liées par la condition:

$$S(x_0, y_0, z_0) = 0; \tag{9}$$

à un système x_0, y_0, z_0, u, v correspond une détermination *unique* des fonctions $x(u, v, x_0, y_0, z_0)$, $y(u, v, x_0, y_0, z_0)$, $z(u, v, x_0, y_0, z_0)$, et puisque x, y, z sont des fonctions algébriques de x_0, y_0, ce sont des fonctions *rationnelles* des constantes x_0, y_0, z_0, liées par (9).

Nous sommes amenés ainsi à considérer les systèmes (7) de la forme:

$$\begin{cases} du = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy, \\ dv = P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy, \end{cases} \tag{10}$$

dont les seconds membres sont des différentielles totales attachées à la surface algébrique S, et tels que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, définies par (10), soient des fonctions méromorphes de u, v, *rationnelles en* x_0, y_0, z_0.

D'ailleurs, si l'intégrale générale $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ d'un système (10) renferme *rationnellement* les constantes x_0, y_0, z_0 [liées par $S(x_0, y_0, z_0) = 0$], il résulte aussitôt du raisonnement de la page 7 que ce sont des fonctions méromorphes de u, v. Le problème qui se pose est donc le suivant:

Etudier les fonctions inverses de deux intégrales de différentielles totales attachées à une surface algébrique $S(x, y, z) = 0$, *dans l'hypothèse où ces fonctions dépendent* **rationnellement** *des constantes initiales* x_0, y_0, z_0 [*liées par la condition* $S(x_0, y_0, z_0) = 0$].

8. *Difficulté du nouveau problème.* Un premier cas qui se trouve dès maintenant élucidé d'après les résultats classiques, est celui où *les intégrales* $I = \int P dx + Q dy$, $J = \int P_1 dx + Q_1 dy$ *admettent au moins quatre couples (distincts) de périodes.*[1] Les fonctions inverses $x(u, v)$, $y(u, v)$, si elles sont uniformes et méromorphes, sont alors quatre fois périodiques, et se confondent nécessairement avec un couple de fonctions *hyperelliptiques* de u, v.

Le seul cas qui reste à discuter est celui où *les intégrales*

$$I = \int P dx + Q dy, \qquad J = \int P_1 dx + Q_1 dy$$

ont moins de quatre couples de périodes distincts.

Avant d'aller plus loin, insistons sur quelques remarques qui feront mieux comprendre la difficulté du problème.

Si les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ renferment rationnellement (x_0, y_0, z_0), nous savons qu'elles sont à coup sûr uniformes et méromorphes. *Mais il faut bien se garder de croire que la réciproque est vraie.*

Tout d'abord, alors même que le nombre des couples de périodes n'est pas inférieur à 4, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ peuvent être uniformes sans être méromorphes. Pour s'en convaincre, il suffit de jeter les yeux sur l'exemple:

$$(11) \quad du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \quad dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \gamma_2 y - \gamma_3}} - \frac{\lambda[\eta_1 + \omega_1 x]dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Représentons par $\wp(u)$ la fonction $\wp$ de WEIERSTRASS qui correspond aux invariants g_2, g_3; par $\wp_1$ celle qui correspond aux invariants γ_2, γ_3; par $2\omega_1$, $2\omega_2$ les périodes de $\wp$, par $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ celles de $\wp_1$. Les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ définies par (11) se déduisent (en augmentant u, v de constantes arbitraires) du couple:

$$x = \wp(u), \qquad y = \wp_1[v + \lambda\eta_1 u - \lambda\omega_1 \zeta(u)],$$

fonctions de u, v qui sont uniformes mais admettent une infinité de *points*

[1] Il est aisé de montrer directement que deux fonctions uniformes de u, v (*indépendantes*) ne peuvent admettre plus de quatre couples de périodes (distincts) sans être des constantes; le théorème s'établit comme le théorème analogue dans le cas d'une seule variable, mais il résulte aussitôt de ce qui suit.

essentiels correspondant aux pôles de $\zeta(u)$. Les quatre couples de périodes sont ici:

$$\begin{array}{cccc} 2\omega_1, & 0, & 2\omega_2, & 0, \\ 0, & 2\omega_1', & i\pi\lambda, & 2\omega_2', \end{array}$$

et si ω_1, ω_2, ω_1', ω_2', λ sont quelconques, ces périodes ne satisfont pas à la condition de Riemann.

9. Au moins, du moment que le nombre des couples de périodes n'est pas inférieur à 4, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ ne peuvent être méromorphes sans être hyperelliptiques, et par suite sans renfermer rationnellement les constantes (x_0, y_0, z_0). Il n'en va plus de même quand le nombre des couples de périodes est moindre que 4: tout d'abord, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ peuvent encore être uniformes sans être méromorphes; mais, de plus, *elles peuvent être méromorphes et renfermer sous forme transcendante les constantes* (x_0, y_0, z_0). C'est ce qui apparaît aussitôt sur les deux exemples:

$$(12) \qquad du = \frac{dx}{x}, \qquad dv = \frac{dy}{y} + \frac{dx}{(x-1)^2},$$

$$(13) \qquad du = \frac{dx}{x}, \qquad dv = \frac{dy}{y} - dx;$$

le premier système est vérifié par le couple

$$(14) \qquad x = e^u, \qquad y = e^{v + \frac{1}{e^u - 1}},$$

le second par le couple

$$(15) \qquad x = e^u, \qquad y = e^{v + e^u};$$

le couple (14) présente des singularités essentielles; le couple (15) est méromorphe mais l'intégrale générale correspondante s'écrit:

$$x = x_0 e^u, \qquad y = y_0 e^{v + x_0(e^u - 1)}$$

et renferme x_0 sous forme transcendente. Pour les systèmes (12) et (13) la correspondance entre x, y et x_0, y_0 est *biuniforme mais non birationnelle:* le nombre des couples de périodes est égal à 2.

Ces remarques font nettement comprendre pourquoi il sera indispensable, par la suite, de supposer non seulement que x, y, z sont des fonctions

uniformes et méromorphes de u, v mais encore qu'elles renferment *rationnellement* (x_0, y_0, z_0).

D'une façon précise, le théorème de WEIERSTRASS sera établi si nous établissons cette proposition [1]:

»*Soit* $u = I(x, y, z)$, $v = J(x, y, z)$ *deux intégrales de différentielles totales attachées à la surface algébrique* $S(x, y, z) = 0$ *et qui possèdent au plus trois couples de périodes. Si les fonctions inverses* $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ *renferment rationnellement les constantes initiales* (x_0, y_0, z_0), *ce sont des fonctions hyperelliptiques dégénérées;* autrement dit, ce sont des combinaisons rationnelles d'un des 5 systèmes:

$$X = e^{U}\frac{\sigma(V-a)}{\sigma(V)}, \qquad Y = \wp(V), \qquad Z = \wp'(V),$$

$$X = U + a\zeta(V), \qquad Y = \wp(V), \qquad Z = \wp'(V),$$

$$X = e^{U}, \qquad Y = e^{V}, \qquad Z = 0,$$

$$X = U, \qquad Y = e^{V}, \qquad Z = 0,$$

$$X = U, \qquad Y = V, \qquad Z = 0,$$

où U, V désignent deux combinaisons linéaires convenables de u, v.»

Ce théorème cesse d'être exact si les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ sont *uniformes* et même *méromorphes*, mais sont des fonctions *transcendantes* (uniformes mais non rationnelles) de (x_0, y_0, z_0).

Pour démontrer ce théorème, je commencerai par établir que les intégrales $u = I$, $v = J$ qu'il nous faut considérer présentent au moins *une courbe polaire.*

---

[1] Dans ses mémorables travaux sur les fonctions algébriques de deux variables, qui ont donné un tel essor aux recherches de toute nature intéressant les surfaces algébriques, M. PICARD (*Mémoire couronné,* p. 99—116) a indiqué une démonstration de ce théorème. C'est même, à ma connaissance, la seule démonstration qui ait été tentée du théorème de WEIERSTRASS, (ou plus exactement, d'une proposition équivalente). Mais l'analyse de l'illustre géomètre Français présente des lacunes qui ne me semblent pouvoir être comblées sans une discussion analogue à celle qu'on trouvera développée aux pages 25—38; or c'est cette discussion qui constitue toute la difficulté de la démonstration que je propose.

Des courbes polaires des intégrales

$$I = \int P dx + Q dy, \qquad J = \int P_1 dx + Q_1 dy.$$

10. *Rappel de quelques définitions.* Soit $I = \int P dx + Q dy$ une intégrale de différentielle totale attachée à la surface algébrique:

(16) $$S(x, y, z) = 0.$$

Par définition, P et Q sont rationnels en x, y, z, et quand, dans P, Q, on remplace z en x, y, l'expression $P dx + Q dy$ est une différentielle exacte. Les diverses déterminations de la quantité:

$$I = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy$$

qui correspondent à un point (x, y, z) de S ne diffèrent que par des constantes d'addition, qui sont les *périodes* de l'intégrale.

On appelle *courbe polaire* de l'intégrale toute courbe tracée sur S telle que I devienne infinie en un point arbitraire de cette courbe: une courbe polaire est nécessairement algébrique. Par définition, l'intégrale I admet une courbe polaire à l'infini si, après une transformation homographique arbitraire effectuée sur S, l'intégrale admet une courbe polaire que le retour aux premières variables rejette à l'infini.

D'après cela, si I possède une courbe polaire C, il est loisible de la supposer à distance finie: soit $R(x, y, z) = 0$ une surface algébrique dont l'intersection avec S contient la courbe C. La transformation $X = R(x, y, z)$ fait correspondre à S une surface $S_1(X, y, z) = 0$, et, si les axes Ox, Oy, Oz ont été choisis quelconques, la correspondance entre S et S_1 est *birationnelle.*[1] Moyennant une transformation birationnelle effectuée sur S, on peut donc toujours faire en sorte que la courbe polaire considérée soit située dans le plan $x = 0$ (sans se réduire à une parallèle à Oz), et toute branche de l'intégrale

[1] Il suffit, en effet, que pour une valeur arbitraire (non exceptionnelle) X_0 de X, la courbe $X_0 = R(x, y, z)$ de S n'ait pas une infinité de cordes parallèles à Ox: si donc on ne choisit pas les axes $Oxyz$ d'une façon exceptionnelle, à un point y, z de la courbe $S_1(X_0, y, z) = 0$, autrement dit à un point (X, y, z) de la surface S_1, correspond une seule valeur de x.

I qui devient infini sur cette courbe sera développable, dans le voisinage de la courbe polaire, sous la forme:

$$(17) \quad I = \frac{A_0(y)}{X^m} + \frac{A_1(y)}{X^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}(y)}{X} + \alpha \log X + A_m(y) + A_{m+1}(y) X + \ldots,$$

avec

$$x = X^l;$$

l, m sont deux entiers ($l > 0$, $m \geqq 0$), les A des fonctions *algébriques* de y; α *une constante numérique*. Pour $y = y_0$ [abstraction faite d'un nombre fini de valeurs exceptionnelles y_0], les A sont holomorphes, et la série (17) converge pour $|X|$ suffisamment petit.

La courbe polaire est dite *logarithmique* si $\alpha \neq 0$, *non-logarithmique* si $\alpha = 0$; α est le *résidu* de l'intégrale relatif à la courbe polaire $X = 0$; la période $2i\pi\alpha$ de I est dite *période polaire*. Enfin, la somme des résidus des diverses branches de I relatifs à toutes les courbes polaires (à distance finie ou infinie) *est nulle*.

Quand l'intégrale I n'admet de courbes polaires ni à distance finie, ni à l'infini, l'intégrale abélienne $\int P(x, y_0, z)dx$, attachée à la courbe $S(x, y_0, z) = 0$, est une intégrale *de première espèce*, (du moment que la valeur y_0 n'est pas choisie d'une manière exceptionnelle). Il suit de là (comme il est bien connu) que cette intégrale a au moins deux périodes dont le rapport est imaginaire. Une remarque analogue s'applique à l'intégrale abélienne $\int Q(x_0, y, z)dy$. L'intégrale I a, dans ce cas, au moins deux périodes de rapport imaginaire.

11. *De l'existence d'une courbe polaire pour les intégrales I, J.* Ceci rappelé, soit $I = \int P dx + Q dy$, $J = \int P_1 dx + Q_1 dy$ deux intégrales de différentielles totales attachées à S et *possédant au plus trois couples de périodes distincts.* Je dis qu'*une au moins des deux intégrales admet une courbe polaire.*[1]

Il est loisible (en combinant linéairement I et J) de faire en sorte qu'une au moins des périodes de I et une des périodes de J soient nulles.[2]

[1] La démonstration supposera toutefois que les deux intégrales I, J ne sont pas fonctions l'une de l'autre, autrement dit que $PQ_1 - Q_1 P$ n'est pas identiquement nul: mais le cas $PQ_1 - Q_1 P \equiv 0$ ne nous intéresse pas ici.

[2] A moins toutefois que toutes les périodes d'une combinaison $\alpha I + \beta J$ ne soient nulles; mais $\alpha I + \beta J$ serait alors rationnelle en x, y, z et admettrait une courbe polaire.

Supposons maintenant que I n'admette pas de courbe polaire (à distance finie ou infinie). D'après une remarque précédente, I (qui a au plus deux périodes) a sûrement deux périodes de rapport imaginaire, soit $2\omega_1$, $2\omega_2$: posons

$$X = \wp(u, 2\omega_1, 2\omega_2), \qquad u = I = \int P dx + Q dy;$$

X est une fonction uniforme de (x, y, z), qui, pour y_0 pris au hasard, est une fonction algébrique de x, (puisque $\int P(x, y_0, z) dx$ est une intégrale abélienne de première espèce), et qui, pour x_0 pris au hasard, est une fonction algébrique de y; X est donc une fonction rationnelle de x, y, z, qu'il est loisible, par une transformation *birationnelle*[1] effectuée sur S, de faire coïncider avec x. Pour la même raison, soit $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ les périodes de J, et soit

$$Y = \wp(v, 2\omega_1', 2\omega_2') = \wp_1, \qquad v = \int P_1 dx + Q_1 dy;$$

Y est une fonction rationnelle[2] de x, y, z, qu'il est loisible de faire coïncider avec y. Une transformation birationnelle effectuée sur S ramène donc I et J à la forme:

$$I = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad J = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2' y - g_3'}},$$

système à quatre couples de périodes distincts, à savoir les périodes:

$$2\omega_1, \ 2\omega_2, \ 0, \ 0 \quad \text{pour } I,$$

$$0, \ 0, \ 2\omega_1', \ 2\omega_2' \quad \text{pour } J;$$

résultat absurde, puisque, par hypothèse I, J admettent au plus trois couples le périodes.

Une au moins des intégrales I, J, dont il nous faut étudier l'inversion, possède donc des courbes polaires (à distance finie ou infinie). C'est l'examen approfondi de ces courbes polaires qui va nous conduire au but que nous poursuivons. Mais avant d'entrer dans cette discussion, je traiterai au préalable l'inversion de I, J dans deux cas particuliers très simples.

---

[1] Voir la note 1 de la page 12.

[2] Cette fonction ne se réduit pas à une simple fonction de x, car autrement les intégrales $I(x, y, z)$, $J(x, y, z)$ seraient fonctions l'une de l'autre.

Examen d'un premier cas particulier.

12. Je traiterai en premier lieu le problème suivant:

Déterminer tous les cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par le système

$$(18)\quad \begin{cases} u = \int P(x, y, z)du + Q(x, y, z)dy \equiv I(x, y, z), \\ v = \int P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy \equiv J(x, y, z), \\ S(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

*sont **rationnelles** en u et uniformes en v.*

Ecrivons le système (18) sous la forme:

$$(19)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = A(x, y, z), \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = B(x, y, z),$$

$$(20)\qquad \frac{\partial x}{\partial v} = A_1(x, y, z), \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = B_1(x, y, z),$$

et cherchons à satisfaire d'abord aux équations (19) en y remplaçant x, y, z par des fonctions rationnelles de u d'un certain degré q. Pour une valeur convenable de q, les conditions ainsi trouvées sont, par hypothèse, compatibles, et l'intégrale générale de (19) se met sous la forme:

$$(21)\qquad x = R(u - a, b), \qquad y = R_1(u - a, b), \qquad z = R_2(u - a, b),$$

les fractions rationnelles R, R_1, R_2 de $(u - a)$ dépendant *algébriquement* d'une seconde [1] arbitraire b.

Il reste à déterminer a, b (fonctions inconnues de v) de façon que les deux équations (20) soient aussi vérifiées. Or des équations (21) on peut tirer:

$$(22)\qquad u - a(v) = G(x, y), \qquad b(v) = H(x, y)$$

G, H désignant des fonctions *algébriques* de x, y. Si on pose: $y_1 = H(x, y)$,

---

[1] On peut disposer de a, b de façon que, pour $u = 0$, x, y et z prennent les valeurs arbitraires x_0, y_0, z_0, liées par la condition $S(x_0, y_0, z_0) = 0$.

la seconde équation (22) donne: $v = \psi(y_1)$, d'où $dv = \psi'(y_1)dy_1$, $\psi'(y_1)$ étant nécessairement *algébrique* en y_1. Comme la fonction $y_1(v)$, par hypothèse n'admet qu'une nombre fini de branches, elle est (d'après un théorème classique) *algébrique en* v, *ou en* e^{gv}, *ou en* $\wp(x, g_2, g_3)$, [g, g_2, g_3 constantes numériques], et inversement une des trois expressions v, e^{gv}, $\wp(v, g_2, g_3)$ est algébrique en y_1, c'est-à-dire en x, y. Si on veut encore,

1° ou bien l'intégrale $v = J(x, y, z)$ n'a pas de périodes; J est alors rationnelle en x, y, z, soit $J = R(x, y, z)$;

2° ou bien J n'a qu'une période,[1] soit $2\omega_1$, qu'il est loisible (en multipliant v par $\frac{i\pi}{\omega_1}$) de supposer égale à $2i\pi$, et l'expression e^J (qui est *uniforme* en x, y, z) est algébrique en x, y; e^J est donc rationnelle en x, y, z, soit $e^J = \rho(x, y, z)$;

3° ou bien enfin J est dénué de courbes polaires et n'a que deux[2] périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ (dont le rapport est imaginaire); la fonction $\wp(J, 2\omega_1, 2\omega_2)$, uniforme en x, y, z, est algébrique en x, y, donc *rationnelle en* x, y, z, soit $\wp = \rho(x, y, z)$.

---

[1] Il ne faut pas oublier que les périodes des intégrales I, J, attachées à la surface S, correspondent essentiellement à des cycles *fermés* sur S. Soit par exemple,

$$du = dx + \sqrt{y}dy, \qquad dv = \frac{dy}{y}, \qquad S \equiv y - z^2 = 0.$$

L'intégrale $v = J$, attachée à S, *a comme période* $4i\pi$ *et non* $2i\pi$, car il faut que y tourne deux fois autour du point $y = 0$ pour que z reprenne la même valeur. Les fonctions uniformes $x = u - \frac{2}{3} e^{\frac{3v}{2}}$, $y = e^v$ admettent le couple de périodes $2\omega = 0$ (pour u), $2\omega_1 = 4i\pi$ (pour v), (et non pas $2\omega_1 = 2i\pi$).

[2] Le système de périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ est bien entendu supposé *primitif*. La remarque de la note 1 s'applique encore. Par exemple, soit:

$$du = dx + \sqrt{y - e_1}\, dy, \quad dv = \frac{dy}{\sqrt{2(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}},$$

$$S \equiv z - \sqrt{y - e_1} - \sqrt{4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)} = 0,$$

$$(e_1 + e_2 + e_3 = 0);$$

si $2\omega_1$, $2\omega_2$ sont les périodes de la fonction $\wp(v, e_1, e_2, e_3)$, les périodes de J sont $2\omega_1$ et $4\omega_2$ (et non pas $2\omega_1$, $2\omega_2$).

J'ajoute qu'en posant $Y = \rho(x, y, z)$, on peut, moyennant une transformation *birationnelle*,[1] effectuée sur S, supposer que ρ *coïncide avec* Y; la différentielle dv est alors une des trois différentielles suivantes:

$$dv = dy, \qquad dv = \frac{dy}{y}, \qquad dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}};$$

dans le dernier cas, $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ s'exprime rationnellement en x, y, z.

Discutons ces trois hypothèses, en remarquant immédiatement que les intégrales $u = I$, $v = J$ ne sauraient admettre de couple de périodes de la forme $(2\omega, 0)$, puisque les fonctions x, y, z de u, v sont rationnelles en u.

13. *Premier sous-cas:* $dv = dy$. D'après la remarque précédente, u doit être sans période; c'est donc (comme v) une fonction rationnelle de (x, y, z). Inversement, les fonctions x, y, z de u, v, à la fois *uniformes* et *algébriques*, sont *rationnelles*. La surface S correspond birationnellement à un plan.

14. *Deuxième sous-cas:* $dv = \frac{dy}{y}$. En remplaçant u par $u - \alpha v$, (α désignant une constante convenable), on peut faire en sorte que I, J admettent le couple de périodes $(0, 2i\pi)$: les fonctions x, y, z de u, v sont alors uniformes en e^v. De plus, I n'a plus de périodes; car si I, J possédaient le couple de périodes $(2\omega, 2mi\pi)$, ils posséderaient aussi le couple $(2\omega, 0)$. *L'intégrale* $u = I$ *est donc (comme* e^v*) rationnelle en* (x, y, z), et réciproquement les fonctions uniformes x, y, z de u, e^v sont *rationnelles en* $u, e^v = \theta$. La surface S correspond birationnellement à un plan.

15. *Troisième sous-cas:* $dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$. Je représente par $2\omega, 2\omega'$ deux périodes de $u = I$ qui correspondent aux périodes de $2\omega_1$, $2\omega_2$ de J, et je considère l'expression $\alpha\zeta(v) + \beta v$, où les constantes α, β sont choisies de façon que $(\alpha\eta_1 + \beta\omega_1)$ et $(\alpha\eta_2 + \beta\omega_2)$ soient égaux respectivement à ω et ω'. Je pose ensuite

$$u_1 = u - \alpha\zeta(v) - \beta v,$$

[1] Voir la note 1, p. 12.

c'est-à-dire:

$$du_1 = du + [\alpha\wp(v) - \beta]dv = Pdx + Qdy + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}[\alpha y - \beta].$$

Les deux intégrales $u_1 = I_1$, $v = J$ sont encore attachées à la surface S (puisque $\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}$ est rationnel en x, y, z), et elles admettent les deux couples de périodes:

$$0 \ , \ 0 \quad \text{pour} \quad u_1,$$

$$2\omega_1 \ , \ 2\omega_2 \quad \text{pour} \quad v.$$

Les fonctions x, y, z de u_1, v sont encore *rationnelles* en u_1, *uniformes* en v, et elles ne changent pas quand on augmente v de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$. Enfin, si les intégrales I_1, J admettent un troisième couple de périodes, soit $(2\Omega, 2m\omega_1 + 2n\omega_2)$, elles admettent aussi le couple $(2\Omega, 0)$, ce qui exige que 2Ω soit nul. *L'intégrale* $u_1 = I_1$ *est donc (comme* $\wp(v)$*) rationnelle en* (x, y, z). Inversement, les fonctions x, y, z de u, v, *uniformes et algébriques* en $u_1, \wp(v), \wp'(v)$, sont *rationnelles en* $u_1, \wp(v), \wp'(v)$. La surface S correspond birationnellement au cylindre $Z^2 = 4Y^3 - g_2Y - g_3$ de l'espace (X, Y, Z).

En substituant $u - \beta v$ à u, et en divisant ensuite u par α (si $\alpha \neq 0$), on fait $\beta = 0$ et $\alpha = 1$. On voit donc qu'après une substitution linéaire convenable effectuée sur u, *les fonctions* x, y, z *de* u, v *sont rationnelles en* $\wp(v), \wp'(v)$ *et en* $U = u + \varepsilon\zeta(v)$, $(\varepsilon = 0$ *ou* $1)$, et cela de telle façon qu'inversement $\wp(v), \wp'(v)$ et U s'expriment rationnellement en (x, y, z).

16. *Conclusions.* La discussion précédente se résume ainsi:

Quand les fonctions $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ définies par un système (18) sont rationnelles en u et uniformes en v, une transformation birationnelle effectuée sur S et la substitution à u d'une combinaison linéaire en u, v, ramènent le système (18) à une des trois formes:

(I) $\quad du = dx, \qquad dv = dy, \qquad z = 0,$

(II) $\quad du = dx, \qquad \alpha dv = \frac{dy}{y}, \qquad z = 0,$

(III) $\quad du = dx + \frac{\varepsilon y\,dy}{z}, \qquad dv = \frac{dy}{z}, \qquad z^2 = 4y^3 - g_2y - g_3.$

$(\alpha, g_2, g_3$ constantes numériques, $\varepsilon = 0$ ou $1)$.

Les fonctions x, y, z sont rationnelles en u, v dans le cas (I), en u, e^{av} dans le cas (II), en $\{u - \varepsilon\zeta(v)\}$, $\wp(v)$, $\wp'(v)$ dans le cas (III). Elles dépendent d'ailleurs *rationnellement* des constantes initiales (x_0, y_0, z_0); la chose est évidente dans les deux premiers cas; dans le troisième, il suffit de vérifier [1] que les fonctions

$$\text{(IV)} \qquad y = \wp(v), \qquad x = u - \varepsilon\zeta(v)$$

admettent un théorème d'addition. Or posons

$$x_1 = x(u + u_0, v + v_0), \qquad y_1 = y(v + v_0), \qquad x_0 = x(u_0, v_0), \qquad y_0 = y(v_0),$$
$$R(y) = 4y^3 - g_2 y - g_3;$$

on trouve:

$$y_1 = -(y + y_0) + \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{R(y)} - \sqrt{R(y_0)}}{y - y_0}\right]^2,$$

$$x_1 = (x + x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\sqrt{R(y)} - \sqrt{R(y_0)}}{y - y_0}\right].$$

Enfin, la surface S correspond *birationnellement*, dans les cas (I), (II) à un plan et dans le cas (III) au cylindre $z^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$.

Examen d'un second cas particulier.

17. Le second problème que je traiterai maintenant s'énonce ainsi:

Determiner tous les cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, définies par le système

$$(18) \qquad \begin{cases} u = \int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy \equiv I, \\ v = \int P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy \equiv J, \\ S(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

sont rationnelles en e^u et méromorphes en v. L'intégrale J est supposée dénuée de courbes polaires.

---

[1] Cette vérification est inutile, si on se rappelle que les fonctions (IV) sont les quotients de trois séries $\theta(u, v)$ dégénérées [voir le n° 4].

Il est loisible d'admettre (et c'est ce que nous ferons) que $2i\pi$ est *la plus petite période* des fonctions $x(u, v_0)$, $y(u, v_0)$, $z(u, v_0)$. Autrement, on multiplierait u par un entier convenable.

Ecrivons le système (18) sous la forme (19), (20) [page 15], posons $t = e^u$, et cherchons à satisfaire aux deux premières équations:

$$(23) \qquad t\frac{\partial x}{\partial t} = A(x, y, z), \qquad t\frac{\partial y}{\partial t} = B(x, y, z)$$

en y remplaçant x, y, z par des fractions rationnelles en t d'un certain degré q. Pour une valeur convenable de q, les conditions ainsi formées sont compatibles et donnent pour l'intégrale générale de (23) les expressions:

$$(24) \qquad x = R(at, b), \qquad y = R_1(at, b), \qquad z = R_2(at, b),$$

les fonctions rationnelles R, R_1, R_2 de at dépendant *algébriquement* d'une seconde indéterminée b. Il reste à disposer des fonctions $a(v)$, $b(v)$ de façon à satisfaire aux équations (20). Or des égalités (24), on tire:

$$(25) \qquad a(v)t = G(x, y), \quad b(v) = H(x, y), \quad [G, H \text{ algébriques en } x, y].$$

D'après le raisonnement des pages 16, 17, la seconde égalité (25) montre que l'intégrale $J(x, y, z)$, qui, par hypothèse, n'a pas de courbe polaire, coïncide, moyennant une transformation *birationnelle* effectuée sur S, avec l'intégrale elliptique $\int^{*} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$; le radical $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ s'exprime rationnellement en x, y, z.

18. Soit 2ω, $2\omega'$ deux périodes de $u = I$ qui correspondent aux deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ de J. Considérons la fonction elliptique de seconde espèce $\frac{\sigma(v-\alpha)}{\sigma(v)} e^{\beta v}$, et déterminons[1] [ce qui est toujours possible] α et β de façon que les multiplicateurs de cette fonction soient $e^{-2\omega}$, $e^{-2\omega'}$; sa dérivée logarithmique est:

$$\zeta(v-\alpha) - \zeta(v) + \beta \equiv \beta - \zeta(\alpha) - \frac{1}{2}\left[\frac{\wp'(\alpha) + \wp'(v)}{\wp(\alpha) - \wp(v)}\right].$$

Posons:

$$du_1 = du + \{\zeta(v-\alpha) - \zeta(v) + \beta\} dv,$$

[1] Si $\omega = \omega' = 0$, α et β sont nuls, et la fonction de seconde espèce se réduit à l'unité.

c'est-à-dire:

$$t_1 = t\frac{\sigma(v-a)}{\sigma(v)}e^{\beta v}, \qquad (t_1 = e^{u_1}).$$

La différentielle:

$$du_1 = \int Pdx + Qdy + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\left[\beta - \zeta(\alpha) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(a) + \sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}{y - \wp(a)}\right]$$

est encore attachée à la surface S, et les intégrales $u_1 = I_1$, $v = J$ admettent les couples de périodes:

$$\begin{array}{lll} 0 \ , \ 0 & \text{pour} & I_1, \\ 2\omega_1 \ , \ 2\omega_2 & \text{pour} & J. \end{array}$$

Les fonctions x, y, z de u_1, v sont rationnelles[1] en $t_1 = e^{u_1}$, méromorphes en v, et ne changent pas quand on augmente v de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$; *elles sont donc rationnelles en* t_1, $\wp(v)$, $\wp'(v)$. De plus, tout couple de périodes de u_1, v est de la forme $(2\omega, 2m\omega_1 + 2n\omega_2)$, et, par suite, si on veut, de la forme $(2\omega, 0)$; ce qui exige que 2ω soit un multiple de $2i\pi$. Il suit de là que t_1 est (comme $\wp(v)$ et $\wp'(v)$) une fonction rationnelle de x, y, z; car t_1 est à la fois uniforme et algébrique en x, y, z.

19. Nous arrivons donc à la conclusion suivante:

L'intégrale $v = J$ du système (18) *étant dénuée de courbe polaire, les fonctions x, y, z de u, v définies par ce système, — si elles sont rationnelles en e^u et méromorphes en v —, sont des combinaisons rationnelles de $\wp(v)$, $\wp'(v)$, et $U = e^{(ru+\beta v)} \times \frac{\sigma(v-a)}{\sigma(v)}$,* [$r$ désigne un entier, α, β des constantes numériques, ainsi que les invariants g_2, g_3 de $\wp(v)$]. Inversement $\wp(v)$, $\wp(v)$ et U s'expriment rationnellement en (x, y, z).

Si on veut encore, une transformation birationnelle effectuée sur S et la substitution à u d'une combinaison linéaire en u, v, ramènent le système (18) à la forme:

$$(18) \qquad \begin{cases} du = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{z}\left[\zeta(\alpha) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(a) + z}{\wp(a) - y}\right], \qquad dv = \frac{dy}{z}, \\ z^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3; \end{cases}$$

la première équation, pour $\alpha = 0$, se réduit à $du = \frac{dx}{x}$.

[1] Par hypothèse, $2i\pi$ est la plus petite période des fonctions $x(u, v_0)$, $y(u, v_0)$, $z(u, v_0)$; il en est de même évidemment quand on remplace u par $u_1 + F(v_0)$.

La surface S est une transformée birationnelle du cylindre:

$$z^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

Enfin, il est aisé de voir que, dans le cas que nous venons de traiter, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ renferment *rationnellement* les constantes initiales (x_0, y_0, z_0). Il suffit de vérifier[1] que les fonctions

$$x = e^u \frac{\sigma(v-a)}{\sigma(v)}, \qquad y = \wp(v)$$

admettent un théorème d'addition.[2] Or appelons x_1, y_1 ce que deviennent ces fonctions quand on y remplace u, v par $(u + u_0)$, $(v + v_0)$, et appelons de même x_0, y_0 les valeurs de x, y pour $u = u_0$, $v = v_0$. On trouve aussitôt [en posant $R(y) \equiv 4y^3 - g_2 y - g_3$]:

$$x_1 = \frac{x x_0}{2\sigma(a)} \left\{ \frac{\sqrt{R(y)}}{(y - y_0)(y - \wp(a))} - \frac{\sqrt{R(y_0)}}{(y - y_0)(y_0 - \wp(a))} - \frac{\wp'(a)}{[y - \wp(a)][y_0 - \wp(a)]} \right\},$$

$$y_1 = -y - y_0 + \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{R(y)} - \sqrt{R(y_0)}}{y - y_0}\right]^2.$$

---

[1] Voir la note 1 p. 19.

[2] On aurait traité aussi facilement le problème qui fait l'objet de ce chapitre sans supposer que l'intégrale $v = J$ soit dénuée de *courbes polaires*. Il aurait fallu considérer, en outre du cas étudié plus haut (p. 20), les deux cas [n°s 13, 14] où on a:

$$dv = dy, \quad \text{ou} \quad a dv = \frac{dy}{y}.$$

On trouve aussitôt qu'une transformation birationnelle effectuée sur S et une substitution linéaire effectuée sur u, v ramènent le système (18) [quand les fonctions x, y, z de u, v dont *méromorphes*] à une des deux formes:

$$u + a = \log x + \alpha y + \beta y^2 + \ldots + \lambda y^n, \qquad v + b = y,$$

$$u + a = \log x + \frac{\alpha}{y^j} + \frac{\gamma}{y^{j-1}} + \ldots + \frac{\delta}{y} + \varepsilon y + \ldots + \lambda y^m, \quad v + b = \log y,$$

a, b constantes arbitraires, j, m, n entiers $\geqq 0$.

Mais si on veut de plus que $x(u, v)$, $y(u, v)$ admettent un théorème d'addition, il faut que l'expression de $u + a$ se réduise à $\log x$; x et y sont alors des fonctions *rationnelles* soit de e^u, v, soit de e^u, e^v.

Ces deux cas particuliers traités, je vais passer à la discussion du cas général. Pour alléger cette discussion, j'en détacherai deux lemmes presque intuitifs concernant les fonctions méromorphes.

Deux lemmes relatifs aux fonctions méromorphes.

20. *Lemme A.* Soit $x = \varphi(u, v)$ une fonction méromorphe[1] de u, v, telle que le changement de variable $v = R_1(u, v_1)$ [R_1 algébrique en u, v_1], la transforme en une fonction $\varphi_1(u, v_1)$ *algébrique en u.* Supposons de plus qu'il existe une seconde transformation analogue $v = R_2(u, v_2)$, telle que $x = \varphi_2(u, v_2)$ soit aussi algébrique en u: les deux transformations sont seulement assujetties à la restriction que de l'égalité: $R_1(u, v_1) = R_2(u, v_2)$ on puisse tirer u, soit $u = \rho(v_1, v_2)$, ρ ne se réduisant pas à une constante. Dans ces conditions, je dis que $x(u, v)$ *est une fonction rationnelle de u, v.*

Il me suffit évidemment de démontrer que la fonction $x = \psi(v_1, v_2)$ est algébrique, car je reviendrai à la fonction $x = \varphi(u, v)$ en remplaçant, dans ψ, les variables v_1 et v_2 par deux fonctions algébriques de u, v. Or dans la fonction $\varphi_2(u, v_2)$, algébrique en u, remplaçons u par $\rho(v_1, v_2)$; puisque ρ est algébrique, le résultat $x = \psi(v_1, v_2)$ est algébrique en v_1. En permutant le rôle de v_1, v_2, on verrait de même que ψ est algébrique en v_2.

C. Q. F. D.

En particulier, considérons la transformation

$$(29) \quad v = \alpha(u+h)^{\frac{n}{m}} + \beta(u+h)^{\frac{n-1}{m}} + \ldots + \lambda(u+h)^{\frac{i+1}{m}} + w(u+h)^{\frac{i}{m}},$$

$$(m, n, i \text{ entiers, } m > 0, \ i \geqq 0, \ n \geqq i),$$

où h est une constante arbitraire dont peuvent dépendre $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$; admettons que, *pour h quelconque*, cette transformation change $x = \varphi(u, v)$ en une fonction $x = \Phi(u, w)$ *algébrique en u:* il suffit de donner à h deux valeurs particulières arbitraires h_1, h_2, de poser $w = v_1$ pour $h = h_1$, $w = v_2$ pour $h = h_2$, et d'appliquer la proposition précédente pour voir que $x(u, v)$ est rationnel en u, v. Il n'y a d'exception que si l'égalité:

$$\alpha_1(u+h_1)^{\frac{n}{m}} + \ldots + v_1(u+h_1)^{\frac{i}{m}} = \alpha_2(u+h_2)^{\frac{n}{m}} + \ldots + v_2(u+h_2)^{\frac{i}{m}}$$

[1] Si $\varphi(u, v)$ est une fonction quelconque, le lemme subsiste, à condition de remplacer dans l'énoncé le mot *rationnelle* par le mot *algébrique.*

ne définit pas u en fonction de v_1, v_2; autrement dit, si la valeur

$$v_1 = v_2\left(\frac{u+h_2}{u+h_1}\right)^{\frac{i}{m}} + \frac{a_2(u+h_2)^{\frac{n}{m}} + \ldots + \lambda_2(u+h_2)^{\frac{i+1}{m}} - a_1(u+h_1)^{\frac{n}{m}} - \ldots - \lambda_1(u+h_1)^{\frac{i+1}{m}}}{(u+h_1)^{\frac{i}{m}}}$$

ne dépend pas de u. Ce cas exceptionnel ne saurait évidemment se présenter que *si i est nul, m égal à 1 et α indépendant de h;* en particulier, si $n \leqq m$, l'exception ne se présente que dans le cas où la transformation (29) se réduit à la suivante: [1]

(30) $$v = \alpha(u + h) + w, \quad (\alpha \text{ numérique}).$$

Nous aboutissons donc à ce lemme:

Lemme A. *Si une fonction méromorphe $x = \varphi(u, v)$ devient, après une transformation* (29) *où h est arbitraire, une fonction $\Phi(u, w)$ algébrique en u, c'est une fonction rationnelle de u, v, sauf peut-être dans le cas où i est nul. Si, dans la transformation* (29), *n est au plus égal à m, $\varphi(u, v)$ est rationnelle en u, v, à moins que la transformation* (29) *ne se réduise à la transformation* (30).

21. ***Lemme B.*** Si une fonction $x = \varphi(u)$, uniforme dans le domaine d'un point $u = a$, s'exprime par une combinaison algébrique de plusieurs fonctions $\varphi_1(u)$, ..., $\varphi_h(u)$, algébroïdes [2] pour $u = a$, $\varphi(u)$ est holomorphe pour $u = a$ ou admet $u = a$ comme pôle.

---

[1] Si la transformation $v = au + v_1$ change $\varphi(u, v)$ en une fonction $\varphi_1(u, v_1)$ algébrique en u, il en est de même évidemment de la transformation $v = a(u + h) + v_2$, qui substitue à v_1 l'expression $(ah + v_2)$; la présence de h est, dans ce cas, purement parasite.

[2] On sait qu'une fonction $f(u)$ est dite *algébroïde* pour $u = a$ si elle est développable, dans le voisinage de $u = a$, suivant les puissances croissantes de $(u - a)^{\frac{1}{n}}$, (n entier > 0), les premières puissances pouvant être négatives; $f(u)$ est *fractionnaire ou méromorphe* pour $u = a$ si $u = a$ est un pôle de $f(u)$. On dit que $f(u)$ est algébroïde pour $u = \infty$ si la fonction $f_1(u_1) \equiv f\left(\frac{1}{u_1}\right)$ est algébroïde pour $u_1 = 0$.

En particulier, *si* $\varphi(u)$ *est méromorphe dans tout le plan et s'exprime algébriquement à l'aide de plusieurs fonctions* $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_h(u)$, *algébroïdes pour* $u = \infty$, $\varphi(u)$ *est une fraction rationnelle.*

Ce lemme est évident; $u = a$ ne peut être qu'un point *algébrique* — donc un point régulier ou un pôle — de la fonction $\varphi(u)$ uniforme dans le voisinage de $u = a$.

Examen d'une courbe polaire non logarithmique.

22. Nous allons aborder maintenant l'étude générale du cas où *les fonctions inverses* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *des différentielles totales*

$$u = I(x, y, z), \qquad v = J(x, y, z)$$

renferment rationnellement les constantes x_0, y_0, z_0, en supposant seulement qu'une au moins des intégrales I, J admet (à distance finie ou infinie) *une courbe polaire.*

C'est la discussion des intégrales I, J dans le voisinage d'une courbe polaire qui constituera toute la difficulté de cette étude.[1] Nous pouvons, moyennant une transformation birationnelle effectuée sur S, faire en sorte [voir le n° 10] que la courbe polaire considérée Γ soit située à distance finie dans le plan $x = 0$, sans se réduire à une droite parallèle à oz. Plaçons-nous d'abord dans le cas où Γ est une *courbe polaire non-logarithmique* pour une détermination (I_1, J_1) du couple d'intégrales (I, J).

---

[1] Comme on peut augmenter u, v de constantes arbitraires, il est loisible (et c'est ce que nous ferons, pour simplifier l'écriture) de supposer, que $u = 0$, $v = 0$ sont des *valeurs quelconques;* autrement dit, nous admettrons qu'on a préalablement remplacé u, v par $u + a$, $v + b$, les constantes a, b étant arbitrairement choisies (et non exceptionnelles). Dans ces conditions, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ pour $v = 0$, ne se réduisent pas toutes trois à des constantes, et la même remarque s'applique à $u = 0$. De plus, on sait que $x(u + h, v + k)$ s'exprime rationnellement à l'aide de $U_1(u) = x(u, k)$, $U_2(u) = y(u, k)$, $U_3(u) = z(u, k)$ et de $V_1(v) = x(h, v)$, $V_2(v) = y(h, v)$, $V_3(v) = z(h, v)$; soit

$$x(u + h, y + k) = R(U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3);$$

pour $h = k = 0$ et u, v arbitraires, les valeurs de $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$ ne donnent pas à R la forme $\frac{0}{0}$, et la même remarque s'applique à y, z.

Les deux branches en question de I, J sont développables sous la forme:

$$(31)\quad u = I = \frac{A_0(y)}{X^m} + \frac{A_1(y)}{X^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}(y)}{X} + A_m(y) + A_{m+1}(y)X + \ldots,$$

$$(32)\quad v = J = \frac{B_0(y)}{X^n} + \frac{B_1(y)}{X^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}(y)}{X} + B_n(y) + B_{n+1}(y)X + \ldots,$$

avec

$$x = X^l \quad (l \text{ entier } \geqq 1);$$

les A, B sont des fonctions algébriques de y, holomorphes pour une valeur *quelconque* (non exceptionnelle) y_0 de y, et les développements (31), (32), pour $y = y_0$, convergent quand $|x|$ est suffisamment petit; m et n sont deux entiers positifs dont un au moins n'est pas nul; il est loisible de supposer $m \geqq n$ et $m > 0$.

Ceci posé, éliminons X entre les équations (31) et (32). Posons: $u_1 = (u + h)^{\frac{1}{m}}$, ($h$ constante arbitraire); le développement de u_1 peut s'écrire:

$$u_1 = \frac{a_0(y)}{X} + a_1(y) + a_2(y)X + \ldots,$$

et en remplaçant X en fonction de u_1 dans l'égalité (32), il vient:

$$(33)\qquad v = \alpha(y)u_1^n + \beta(y)u_1^{n-1} + \ldots + \nu(y)u_1 + \varpi(y) + \frac{\rho(y)}{u_1} + \ldots,$$

la série (pour $y = y_0$) convergeant si $|u_1|$ est suffisamment grand.

Deux cas sont à distinguer suivant que dans le développement (33) *tous les coefficients* $\alpha, \beta, \ldots$ *jusqu'à* ϖ *inclusivement sont ou non indépendants de* y.

Premier cas.

23. Supposons que les coefficients $\alpha(y)$, $\beta(y)$, ..., $\varpi(y)$ ne soient pas tous des constantes; soit λ le premier de ces coefficients qui dépende effectivement de y, et soit $\lambda(y)u_1^k$ le terme correspondant de la série (33). Posons:

$$u = -h + u_1^m, \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + w u_1^k, \quad (k \geqq 0).$$

Les fonctions x, y, z de u, v deviennent des fonctions méromorphes de u_1, w qui vérifient (pour les grandes valeurs de u_1) les relations:

$$(34)\quad u_1 = \frac{a_0(y)}{X} + a_1(y) + a_2(y)X + \ldots, \qquad w = \lambda(y) + \frac{\mu(y)}{u_1} + \ldots, \qquad [\lambda'(y) \neq 0].$$

Soit y_0 une valeur *arbitraire* de y (valeur pour laquelle les fonctions algébriques $a_0(y)$, $a_1(y)$, ..., $\lambda(y)$, $\mu(y)$, ... sont holomorphes et a_0 différent de zéro); pour $u_1 = \infty$ et $y = y_0$, w prend la valeur $w_0 = \lambda(y_0)$, *variable avec* y_0. Pour plus de clarté, remplaçons u_1 par $\frac{1}{u'}$; le système

$$u' = X\left[\frac{1}{a_0(y)} + b_1(y)X + b_2(y)X^2 + \ldots\right], \qquad w = \lambda(y) + \mu(y)u' + \ldots$$

définit un couple de fonctions $X(u', w)$, $y(u', w)$ qui pour $u' = 0$, $w = w_0$ sont *holomorphes* et prennent les valeurs $X = 0$, $y = y_0$. Les fonctions méromorphes $x = X^l$ et y de (u_1, w) sont donc *rationnelles* en u_1.

Ceci revient à dire que la transformation:

$$(29)\qquad v = \alpha(u+h)^{\frac{n}{m}} + \beta(u+h)^{\frac{n-1}{m}} + \ldots + w(u+h)^k$$
$$(m \geqq n \geqq k \geqq 0, \quad h \text{ constante arbitraire})$$

change les fonctions méromorphes x, y de u, v en deux fonctions de u, w qui sont *algébriques en* u. Il résulte alors du lemme A que x et y (par suite z) sont *rationnelles en* u, v, à moins que la transformation (29) ne se réduise à la forme: $v = \alpha(u+h) + w$, (α constante numérique). Il suffit alors de remplacer l'intégrale J par la combinaison $w = I - \alpha J$ pour que les fonctions x, y, z soient *rationnelles en* u. D'où cette conclusion:

Dans le cas qui nous occupe, les fonctions x, y, z sont rationnelles en u, après qu'on a remplacé v par une combinaison linéaire convenable de u, v.

Deuxième cas.

24. Supposons maintenant que dans le développement (33) tous les coëfficients α, β, ... jusqu'à ϖ inclusivement soient indépendants de y. Posons encore:

$$u = -h + u_1^m, \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + \nu u_1 + w.$$

Si je montre que les fonctions *méromorphes* x, y, z de u_1, w sont rationnelles en u, rien n'est changé à la conclusion précédente. Or les fonctions $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ admettant un théorème d'addition, les fonctions

$$x = \varphi(u_1^m - h, \alpha u_1^n + \ldots + w) \equiv \varphi_1(u_1, w)$$

et

$$y = \psi(u_1^m - h, \alpha u_1^n + \ldots + w) \equiv \psi_1(u_1, w)$$

s'expriment algébriquement [1] à l'aide des quatre fonctions *méromorphes* à une variable:

$$U_1(u_1) = \varphi(u_1^m, \alpha u_1^n + \ldots + \nu u_1), \qquad U_2(u_1) = \psi(u_1^m, \alpha u_1^n + \ldots + \nu u_1),$$
$$V_1(w) = \varphi(h, w), \qquad V_2(w) = \psi(h, w).$$

Pour que φ_1 et ψ_1 soient rationnels en u_1, il faut et il suffit que U_1, U_2 le soient: c'est ce que je vais établir.

Remarquons d'abord qu'inversement U_1, U_2 peuvent s'exprimer algébriquement à l'aide de V_1, V_2 et de $x = \varphi_1$, $y = \psi_1$. Ceci posé, soit $\sigma(y)$ le premier des coefficients $\varpi, \rho, \ldots$ du développement (33) qui dépend effectivement de y, et soit $\frac{\sigma(y)}{u_1^k}$ le terme de (33) correspondant.[2] Faisons la substitution:

$$w = \frac{\rho}{u_1} + \ldots + \frac{w'}{u_1^k}.$$

Les égalités (31), (32) équivalent alors aux suivantes:

$$u_1 = \frac{a_0(y)}{X} + a_1 + \ldots, \qquad w' = \sigma(y) + \frac{\tau(y)}{u_1} + \ldots, \qquad [\sigma'(y) \neq 0],$$

et ce dernier système définit un couple de fonctions $X(u_1, w)$, $y(u_1, w)$ qui, pour $u_1 = \infty$, $w' = w_0'$ (*w_0' arbitraire*), sont holomorphes et prennent les valeurs $X = 0$, $y = y_0$. D'autre part, V_1, V_2 deviennent des fonctions $W_1(u_1, w') \equiv V_1\left(\frac{\rho}{u_1} + \ldots + \frac{w'}{u_1^k}\right)$, $W_2(u_1, w') \equiv V_2\left(\frac{\rho}{u_1} + \ldots + \frac{w'}{u_1^k}\right)$ qui admet-

---

[1] Voir la note 1, p. 25.

[2] Un tel terme existe toujours; autrement, v serait fonction de u_1, et $PQ_1 - QP_1$ identiquement nul.

tent $u_1 = \infty$ comme point régulier ou comme pôle. Les fonctions méromorphes $U_1(u_1)$, $U_2(u_1)$ apparaissent ainsi comme des combinaisons algébriques de quatre fonctions W_1, W_2, x, y de (u_1, w') qui (w' étant quelconque) sont algébroïdes pour $u_1 = \infty$: d'après le lemme (B), U_1 et U_2 sont rationnelles en u_1. C. Q. F. D.

La conclusion, dans le second cas, est la même que dans le premier. *Si donc il existe une courbe polaire non logarithmique, les fonctions x, y, z sont rationnelles en u, après qu'on a remplacé v par une combinaison linéaire convenable de u, v.*

Examen d'une courbe polaire logarithmique.

25. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèses où la courbe polaire $x = 0$ est logarithmique pour une au moins des deux branches I, J considérées. Les résidus correspondants α, β de I, J ne sont pas nuls tous deux, soit $\beta \neq 0$; en substituant $\beta I - \alpha J$ à I et $\frac{J}{\beta}$ à J, on peut supposer $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Dans ces conditions, le couple I, J se développe sous la forme suivante [voir le n° 10]

$$(35)\quad u = I(x, y, z) = \frac{A_0}{X^m} + \frac{A_1}{X^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{X} + A_m + A_{m+1}X + \ldots,$$

$$(36)\quad v = J(x, y, z) = \frac{B_0}{X^n} + \frac{B_1}{X^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{X} + \log X + B_n + B_{n+1}X + \ldots.$$

Dans ces conditions, les fonctions méromorphes x, y, z de u, v ne changent pas quand on augmente v de $2i\pi$, et sont, par suite, des fonctions *uniformes* de $\theta = e^v$, fonctions dont les seules singularités essentielles possibles, dans le champ des θ, sont $\theta = 0$, $\theta = \infty$.

Je représenterai systématiquement, dans ce qui suit, par $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ les fonctions x, y de (u, v), par $\varphi_1(u, \theta)$, $\psi_1(u, \theta)$ les fonctions x, y de (u, θ); on a:

$$\varphi_1(u, \theta) \equiv \varphi(u, \log\theta), \qquad \psi_1(u, \theta) \equiv \psi(u, \log\theta).$$

Je représenterai[1] par $V_1(v)$, $V_2(v)$ les fonctions $\varphi(0, v)$, $\psi(0, v)$, et par $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ les fonctions *uniformes* $V_1(\log\theta)$, $V_2(\log\theta)$. D'après le théorème d'addition, $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $\varphi(u, 0)$, $\psi(u, 0)$ et de $V_1(v)$, $V_2(v)$; pour démontrer que x et y sont des fonctions rationnelles de $\theta = e^v$, il suffit de démontrer que T_1, T_2 *sont rationnelles en* θ. Mais le théorème d'addition définit encore *algébriquement*

$$\varphi_1(u + u_0, \overline{\theta\theta_0}), \quad \psi_1(u + u_0, \overline{\theta\theta_0})$$

à l'aide de $\varphi_1(u, \theta)$, $\psi_1(u, \theta)$, $\varphi_1(u_0, \theta_0)$, $\psi_1(u_0, \theta_0)$; en particulier, si on fait $u = u_0 = 0$, on voit que $T_1(\overline{\theta\theta_0})$, $T_2(\overline{\theta\theta_0})$ s'expriment *algébriquement* à l'aide de $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$, $T_1(\theta_0)$, $T_2(\theta_0)$; il en résulte notamment que $T_1\left(\frac{1}{\theta}\right)$, $T_2\left(\frac{1}{\theta}\right)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$. Si donc T_1, T_2 n'admettent pas la valeur $\theta = 0$ comme singularité essentielle, il en va de même pour la valeur $\theta = \infty$. Autrement dit, si les fonctions $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ sont *méromorphes*, elles sont nécessairement *rationnelles*. D'où cette conclusion:

Pour établir que les fonctions x, y de u, $\theta = e^v$ sont rationnelles en θ, il suffit de prouver que $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ sont méromorphes.

Ceci posé, distinguons deux cas suivant que l'entier m est positif ou nul.

Premier cas: $m > 0$.

26. Posons $u_1 = (u + h)^{\frac{1}{m}}$, tirons X de l'équation (35) et portons dans l'équation (36), en remarquant que

$$\log X = -\log u_1 + \frac{1}{m}\log A_0(y) + \frac{a_1(y)}{u_1} + \frac{a_2(y)}{u_1^2} + \dots$$

$$(A_0, a_1, a_2, \dots \text{ algébriques en } y).$$

---

[1] Voir la note 1, p. 25. A la valeur $v = 0$, correspond la valeur $\theta = 1$. Les fonctions $V_1(v)$, $V_2(v)$ ne sont pas toutes deux des constantes, et ne peuvent, par suite, se réduire simultanément à des fractions rationnelles.

Il vient

$$(37)\qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + \nu u_1 - \log u_1 + \varpi + \frac{\rho}{u_1} + \ldots .$$

Je dis d'abord que *tous les coëfficients* $\alpha(y)$, $\beta(y)$, ..., $\nu(y)$ *sont des constantes.*

Supposons en effet qu'il en soit autrement; soit λ le premier des coëfficients $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ qui dépend effectivement de y, et soit λu_1^k le terme correspondant du développement (37). Faisons le changement de variables:

$$u = u_1^m - h, \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + w u_1^k \quad (k \geqq 1);$$

je vais montrer que les fonctions *méromorphes* x, y, z de u_1, w sont (pour w quelconque) *rationnelles en* u_1; le lemme A conduit dès lors à cette conclusion absurde [1] que les fonctions x, y, z de u, v sont *rationnelles.*

A cet effet, substituons à la variable w la variable v_1 définie par l'égalité:

$$v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + v_1 u_1^k - \log u_1,$$

ce qui entraîne

$$w = v_1 - \frac{\log u_1}{u_1^k},$$

et posons [2]: $x = \Phi(u_1, v_1)$, $y = \Psi(u_1, v_1)$; les égalités (35) et (36) prennent la forme:

$$u_1 = \frac{b_1(y)}{X} + b_2(y) + b_3(y)X + \ldots, \qquad v_1 = \lambda(y) + \frac{\mu(y)}{u_1} + \ldots, \qquad (\lambda'(y) \neq 0),$$

et si c désigne la valeur (*arbitraire*) $\lambda(y_0)$, les deux dernières équations définissent un couple $X(u_1, v)$, $y(u_1, v)$ qui pour $u_1 = \infty$, $v_1 = c$ est holomorphe et prend les valeurs $X = 0$, $y = y_0$. Les fonctions Φ, Ψ sont

---

[1] Les fonctions x, y, z de u, v ne changent pas quand on augmente v de $2i\pi$, et ne peuvent être rationnelles en v sans être indépendantes de v.

[2] Φ et Ψ sont uniformes mais peuvent admettre $u_1 = \infty$, $u_1 = 0$, $v_1 = \infty$ comme points essentiels.

donc *holomorphes* pour $u_1 = \infty$, $v_1 = c$, et quand on donne à u_1 de grandes valeurs, à v_1 des valeurs voisines de c, Φ et Ψ diffèrent très peu de o et y_0.

Revenons maintenant à la variable w, et soit $x = \Phi_1(u_1, w)$, $y = \Psi_1(u_1, w)$; on a:

$$\Phi_1 = \Phi\left(u_1, w + \frac{\log u_1}{u_1^k}\right) = \Phi(u_1, w + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro[1] avec $\frac{1}{u_1}$. Donnons à w la valeur constante c; la fonction $\Phi_1(u_1, h) = \Phi(u_1, h + \varepsilon)$ diffère très peu de zéro quand u_1 tend arbitrairement vers l'infini; elle est donc holomorphe pour $u_1 = \infty$, et, comme elle est méromorphe, c'est une fonction rationnelle de u_1. La même conclusion s'applique à y, donc à z, résultat absurde.

C. Q. F. D.

27. Ce point établi, je vais montrer que, (moyennant une transformation linéaire effectuée sur u, v), *x, y, z sont, dans le cas qui nous occupe, rationnelles en u et $\theta = e^v$.*

Puisque $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ sont des constantes, posons:

$$(38) \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + \nu u_1 + \log\tau \equiv H(u_1) + \log\tau, \qquad u = u_1^m - h;$$

$x = \varphi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$ deviennent des fonctions uniformes de u_1, τ dont les seules singularités essentielles possibles sont $u_1 = \infty$, $\tau = 0$, $\tau = \infty$, et qui, en vertu du théorème d'addition, s'expriment algébriquement[2] à l'aide des quatre fonctions:

$$U_1 = \varphi[u_1^m - h, H(u_1)], \qquad U_2 = \psi[u_1^m - h, H(u_1)],$$
$$T_1(\tau) = \varphi(0, \log\tau), \qquad T_2(\tau) = \psi(0, \log\tau).$$

---

[1] Les fonctions $\Phi_1(u, w)$, $\Psi_1(u, w)$ sont uniformes; il est donc loisible, dans $\frac{\log u_1}{u_1^k}$, de prendre la détermination de $\log u_1$ telle que sa partie imaginaire soit comprise entre o et 2π.

[2] Ces expressions algébriques en U_1, U_2, T_1, T_2 ne sauraient être de la forme $\frac{0}{0}$, du moment que les valeurs $u = 0$, $v = 0$ sont *quelconques* (voir la note 1, p. 25). La même remarque s'applique à tous les raisonnements analogues.

Inversement, $T_1(\tau)$, $T_2(\tau)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $x(u_1, \tau)$, $y(u_1, \tau)$ (et de U_1, U_2). Les fonctions $T_1(\tau)$, $T_2(\tau)$ sont donc *méromorphes* (et par suite *rationnelles*) si les fonctions $x(u_1, \tau)$, $y(u_1, \tau)$ sont méromorphes; à ces dernières, substituons les fonctions $x(t, \tau)$, $y(t, \tau)$ obtenues en posant $u_1 = \frac{t}{\tau}$, fonctions qui ne sauraient présenter de singularités essentielles en dehors de $t = \infty$, $\tau = 0$, $\tau = \infty$.[1] Je dis que $\tau = 0$ n'est pas un point essentiel de ces fonctions, ou, si on veut, en remplaçant τ par $\frac{t}{u_1}$, que $u_1 = \infty$ *est un point régulier ou un pôle des fonctions* $x(u_1, t)$, $y(u_1, t)$. Pour nous en rendre compte, changeons $\log \tau$ en $\log t - \log u_1$ dans l'équation (38): on voit que $x(u_1, t)$, $y(u_1, t)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $T_1(t)$, $T_2(t)$, U_1', U_2', si U_1', U_2' désignent les fonctions déduites de U_1, U_2 en y remplaçant $H(u_1)$ par $H(u_1) - \log u_1$; à savoir:

$$U_1' = \varphi[u_1^m - h, H(u_1) - \log u_1], \qquad U_2' = \psi[u_1^m - h, H(u_1) - \log u_1].$$

Tout revient donc à démontrer que $u_1 = \infty$ *n'est pas un point essentiel de* $U_1'(u_1)$, $U_2'(u_1)$.

Admettons, pour un instant, ce résultat. Alors, $T_1(t)$, $T_2(t)$ sont nécessairement rationnels, et comme U_1, U_2 s'expriment algébriquement à l'aide de U_1', U_2', $T_1(u_1)$, $T_2(u_1)$, les fonctions méromorphes $U_1(u_1)$, $U_2(u_1)$ sont aussi rationnelles. Il suit de là que les fonctions $x(u_1, \tau)$, $y(u_1, \tau)$ sont rationnelles en u_1, τ; par conséquent, $x(u, v)$, $y(u, v)$ deviennent des fonctions algébriques de u quand on y fait le changement de variables

$$v = \alpha(u + h)^{\frac{n}{m}} + \beta(u + h)^{\frac{n-1}{m}} + \ldots + \nu(u + h)^{\frac{1}{m}} + w;$$

mais, d'après le lemme A, ceci exige que x, y, z soient rationnels en u, v (résultat absurde), à moins que la relation entre v et w ne soit de la forme: $v = \alpha u + w$. En substituant à v la combinaison $v - \alpha u$, on voit que *les fonctions* x, y, z *de* (u, v) *sont rationnelles en* u *et en* $\theta = e^v$.

C. Q. F. D.

---

[1] Si les fonctions $x(t, \tau)$, $y(t, \tau)$, $z(t, \tau)$ sont méromorphes, il en est de même sûrement des fonctions obtenues en remplaçant t par $u_1\tau$.

28. Il nous reste donc seulement à démontrer que $U'_1(u_1)$, $U'_2(u_1)$ sont holomorphes ou rationnels pour $u_1 = \infty$. Or écrivons les relations entre X, y, u_1, t, déduites des équations (35), (36), (37); ces relations sont de la forme:

$$(39)\qquad \begin{cases} u_1 = \frac{b_0(y)}{X} + b_1(y) + b_2(y)X + \dots, \\ t = e^{\omega}\left[1 + \frac{\rho}{u_1} + \dots\right] \equiv \delta(y) + \frac{\eta(y)}{u_1} + \dots \qquad (\delta \not\equiv 0), \end{cases}$$

soit $x(y)$ le premier des coefficients $\delta, \eta, \dots$ qui dépende effectivement de y et soit $\frac{x(y)}{u_1^j}$ le terme correspondant du développement (39). Faisons un dernier changement de variables:

$$t = \delta + \frac{\eta}{u_1} + \dots + \frac{t'}{u_1^j}, \qquad (\delta \neq 0);$$

les relations:

$$u_1 = \frac{b_0(y)}{X} + b_1(y) + b_2(y)X + \dots, \qquad t' = x(y) + \frac{\lambda(y)}{u_1} + \dots, \quad (x'(y) \not\equiv 0)$$

nous montrent, d'après un raisonnement déjà fait, que les fonctions x, y de (u_1, t') sont holomorphes pour $u_1 = \infty$; mais ces fonctions s'expriment algébriquement à l'aide de U'_1, U'_2, et des fonctions T'_1, T'_2 de u_1, t' obtenues en remplaçant dans T_1, T_2 la variable t par l'expression

$$t = \delta + \frac{\eta}{u_1} + \dots + \frac{t'}{u_1^j};$$

T'_1 et T'_2 sont holomorphes (ou fractionnaires) pour $u_1 = \infty$; car l'argument t pour $u_1 = \infty$ (et t' quelconque) s'y réduit[1] à $\delta \neq 0$. Inversement, d'ailleurs, U'_1 et U'_2 s'expriment algébriquement à l'aide des quatre fonctions $x(u_1, t')$, $y(u_1, t')$, T'_1, T'_2, toutes quatre algébroïdes pour $u_1 = \infty$; *le point $u_1 = \infty$ n'est donc pas un point essentiel de $U'_1(u'_1)$, $U'_2(u_1)$.* La discussion du cas $m > 0$ est achevée.

---

[1] Si $j = 0$, autrement dit si $\delta'(y) \not\equiv 0$, t coïncide avec t' et T'_1, T'_2 ne dépendent que de t.

Deuxième cas: $m = 0$.

29. Supposons d'abord *que n soit nul en même temps que m*, (autrement dit que I, J ne deviennent infinies que *logarithmiquement* sur la courbe polaire). Ecrivons les deux égalités:

$$(40)\qquad u = A_0(y) + A_1(y)X + A_2(y)X^2 + \dots,$$

$$(41)\qquad v = \log X + B_0(y) + B_1(y)X + \dots.$$

Posons $\theta = e^v$, et montrons que x, y, z *sont des fonctions méromorphes de* u, θ, *par suite* [n° 25] *des fonctions rationnelles de* θ. L'équation (41) devient:

$$(42)\qquad \theta = X[c_0(y) + c_1(y)X + c_2(y)X^2 + \dots],\qquad c_0 \equiv e^{B_0(y)} \not\equiv 0;$$

en portant dans (40) la valeur de X tirée de (42), on trouve:

$$u = \alpha(y) + \beta(y)\theta + \dots + \lambda(y)\theta^j + \dots.$$

Soit λ le premier des coëfficients $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \dots$ qui dépende effectivement de y. La transformation:

$$u = \alpha + \beta\theta + \dots + u_1\theta^j$$

conduit aux relations suivantes entre u_1, θ, X, y:

$$u_1 = \lambda(y) + \mu(y)\theta + \nu(y)\theta^2 + \dots,\qquad \theta = X[c_0 + c_1X + \dots],\qquad [\lambda'(y) \not\equiv 0],$$

et d'après un raisonnement déjà employé, ces équations sont vérifiées par un couple: $X(u_1, \theta)$, $y(u_1, \theta)$, holomorphe pour $u_1 = u_1^0$, $\theta = 0$. Les fonctions $x(u_1, \theta)$, $y(u_1, \theta)$, sont donc holomorphes pour $\theta = 0$; mais d'autre part, elles s'expriment algébriquement[1] à l'aide des quatre fonctions:

$$U_1 = \varphi(\alpha + \beta\theta + \dots + u_1\theta^j, 0),\qquad U_2 = \psi(\alpha + \beta\theta + \dots + u_1\theta^j, 0),$$

$$T_1 = \varphi(0, \log\theta),\qquad T_2 = \psi(0, \log\theta),$$

et inversement T_1, T_2 s'expriment algébriquement à l'aide des fonctions U_1, U_2, $x(u_1, \theta)$, $y(u_1, \theta)$ qui *toutes les quatre*[2] *sont holomorphes ou frac-*

[1] Voir la note 1, p. 25.

[2] La chose est évidente pour U_1, U_2 puisque les fonctions $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ sont méromorphes.

tionnaires pour $\theta = 0$. Les fonctions uniformes $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ ne sauraient donc admettre $\theta = 0$ comme point essentiel, et sont des fonctions méromorphes (par suite rationnelles) de θ. Il en est donc de même des fonctions x, y, z de u, θ. C. Q. F. D.

30. Je vais établir maintenant que le cas précédent est le seul possible si m est nul, autrement dit que *n est nécessairement nul avec m*. Admettons en effet qu'il en soit autrement et voyons que l'hypothèse est absurde.

Soit donc $m = 0$, $n > 0$. Nous distinguerons ce cas en deux sous-cas suivant que $A_0(y)$ est ou non une constante.

Premier sous-cas: $m = 0$, $n > 0$, $A_0'(y) \not\equiv 0$.

Ecrivons les deux égalités

$$(43)\qquad u = A_0(y) + A_1(y)X + A_2(y)X^2 + \dots, \quad [A'_0(y) \not\equiv 0],$$

$$(44)\qquad v = \frac{B_0(y)}{X^n} + \frac{B_1(y)}{X^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}(y)}{X} + \log X + B_n(y) + B_{n+1}(y)X + \dots, \quad (n > 0);$$

soit y_0 une valeur quelconque (non exceptionnelle) de y, et u_0 la valeur correspondante de A_0; si nous donnons à u, dans (43), la valeur (*arbitraire*) u_0, nous pouvons en tirer y sous la forme:

$$y = y_0 + gX + hX^2 + \dots,$$

et en portant dans (44) il vient:

$$(45)\qquad \begin{cases} v = \dfrac{B_0(y_0)}{X^n} + \dfrac{C_1}{X^{n-1}} + \dots + \dfrac{C_{n-1}}{X} + \log X + C_n + C_{n+1}X + \dots, \\ \equiv \dfrac{B_0(y_0)}{X^n}(1 + \varepsilon), \end{cases}$$

quand X tend vers zéro *arbitrairement*, v tend vers l'infini arbitrairement[1]

[1] Posons $w = \dfrac{v}{B_0(y_0)} = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, $X = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\log X = \log r + i\varphi$, ($\varphi$ restant compris expressément entre 0 et 3π); dans ces conditions, ε tend vers zéro

d'après l'égalité (45); donc si, pour $u = u_0$, v tend arbitrairement vers l'infini, la fonction uniforme $x = X'(u_0, v)$ tend vers zéro, y tend vers y_0. Les fonctions méromorphes x, y, z de u, v seraient donc rationnelles en v, ce qui est absurde. C. Q. F. D.

Second sous-cas: $m = 0$, $n > 0$, $A_0'(y) \equiv 0$.

31. Il est loisible d'admettre que la valeur constante A_0 est nulle (en augmentant u d'une constante) et d'écrire:

$$(46) \begin{cases} u = X^q\{A_q(y) + XA_{q+1}(y) + \ldots\}, & q > 0, \\ v = \frac{B_0(y)}{X^n} + \frac{B_1(y)}{X^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}(y)}{X} + \log X + B_n(y) + B_{n+1}(y)X + \ldots. \end{cases}$$

Si nous remplaçons u par u_1^q, et si nous tirons X de la première équation (46), il vient [en remarquant que $\log u_1 = \log X + a_0(y) + a_1(y)X + \ldots$]:

$$(47) \qquad v = \frac{\alpha}{u_1^n} + \frac{\beta}{u_1^{n-1}} + \ldots + \frac{\nu}{u_1} + \log u_1 + \varpi + \rho u_1 + \ldots.$$

Soit λ le premier des coëfficients $\alpha, \beta, \ldots, \varpi, \ldots$ qui dépend effectivement de y, et soit $\frac{\lambda}{u_1^k}$ le terme correspondant du développement (47), ($k > 0$ ou < 0 ou $= 0$). Posons:

$$(48) \qquad v = \log u_1 + \frac{\alpha}{u_1^n} + \frac{\beta}{u_1^{n-1}} + \ldots + \frac{w}{u_1^k}, \quad (k > 0 \text{ ou } = 0 \text{ ou } < 0);$$

---

avec X; d'une façon précise, η désignant une quantité positive prise d'avance aussi petite qu'on veut, on a: $|\varepsilon| < \eta$, dès que $|X|$ est inférieur à une certaine quantité μ', et par suite:

$$w = \frac{1}{r^n}(\cos n\varphi - i \sin n\varphi)\lambda(\cos \alpha + i \sin \alpha), \text{ avec } 1 - \eta \leqq \lambda \leqq 1 + \eta, \ -\eta \leqq \sin \alpha \leqq \eta;$$

si donc x varie de μ à 0 et φ de 0 à 3π, on voit que w coïncide avec tous les points extérieurs à un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à $\frac{1 + \eta}{\mu^n}$; v coïncide avec tous les points dont le module dépasse $|B_0(y_0)|\frac{(1 + \eta)}{\mu^n}$.

on peut écrire

$$v = \frac{a}{u_1^n}(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro (pour $w = w_0$) quand u_1 tend vers l'infini sur une direction quelconque, et (d'après la note 1 de la page 36), quand u_1 tend vers zéro arbitrairement, v tend arbitrairement vers l'infini.

D'autre part, X, y, u_1, w vérifient deux relations de la forme:

$$u_1 = X[C_0(y) + C_1(y)X + C_2(y)X^2 + \ldots], \qquad (C_0 = \sqrt[q]{A_q}, \text{ etc})$$

$$w = \lambda(y) + u_1\mu(y) + u_1^2\nu(y) + \ldots, \qquad \lambda'(y) \not\equiv 0,$$

et, d'après un raisonnement constamment employé, ces relations montrent que les fonctions $x = X^l$ et y de u_1, w sont holomorphes pour $u_1 = 0$, $w = w_0$.

Mais les fonctions x, y de u_1, w s'expriment algébriquement à l'aide des quatre fonctions: $U_1 = \varphi(u_1^q, 0)$, $U_2 = \psi(u_1^q, 0)$, et V_1', V_2', si V_1', V_2' désignent les fonctions $V_1 = \varphi\ (0, v)$, $V_2 = \psi(0, v)$, où on a remplacé v par l'expression $v = \log u_1 + \frac{a}{u_1^n} + \ldots + \frac{w}{u_1^k}$; réciproquement V_1', V_2' s'expriment algébriquement à l'aide des fonctions U_1, U_2, $x(u_1, w)$, $y(u_1, w)$ qui sont toutes les quatre, holomorphes ou fractionnaires pour $u_1 = 0$; V_1' et V_2' sont donc aussi holomorphes ou fractionnaires pour $u_1 = 0$. Or, quand u_1 tend vers zéro, la variable $v = \frac{a}{u_1^n}(1 + \varepsilon)$ tend vers l'infini *arbitrairement;* les fonctions *méromorphes* $V_1(v)$, $V_2(v)$ sont donc bien déterminées quand v croît indéfiniment; ce sont, par suite, des fractions rationnelles de v; résultat absurde. C. Q. F. D.

Conséquences de la double discussion précédente. Théorème définitif.

32. Les conclusions des n°s 23, 24, 27, 29, 30 et 31 se résument ainsi:

Après une transformation linéaire convenable effectuée sur u, v,

1° *ou bien les fonctions* x, y, z *de* u, v *sont rationnelles en* u;

2° *ou bien les fonctions* x, y, z *sont rationnelles en* e^u, *et les intégrales* I, J *ne peuvent devenir infinies que logarithmiquement.*

Le cas 1° a été étudié aux n°s 12—16.

Dans le cas 2°, I et J admettent le couple de périodes polaires $(2i\pi, 0)$. Si J ne présente pas de courbes polaires, on rentre dans l'hypothèse qui fait l'objet des n°s 17—19. Si J présente une courbe polaire, cette courbe est nécessairement logarithmique, et si le couple de résidus correspondants est α, β, $(\beta \neq 0)$, il suffit de remplacer u par $u - \frac{\alpha}{\beta} v$ et v par $\frac{v}{\beta}$ pour que I et J admettent les deux couples de périodes polaires $(2i\pi, 0)$ et $(0, 2i\pi)$. Dans ces conditions, x, y, z *sont rationnelles en* $t = e^u$, $\theta = e^v$.

Inversement, t et θ sont *algébriques* en x, y, z. Je dis qu'on peut toujours faire en sorte que *t et θ soient rationnelles en x, y, z.* Tout d'abord, les résidus de I (et de J) sont réels et commensurables, et en multipliant I (ou J) par un certain entier, on peut les supposer entiers, premiers entre eux: la plus petite période de I (et aussi de J) est alors $2i\pi$. A la période $2i\pi$ de I correspond une période $2mi\pi$ de J; en remplaçant J par $J_1 = J - mI$, on annule m; seulement, la plus petite période de J_1 peut n'être plus $2i\pi$, mais $2i\pi k$, (k entier); l'entier k entre alors en facteur dans tous les résidus de J_1, soit $J_2 = \frac{J_1}{k}$; à la période $2i\pi$ de J_2 correspond une période $2i\pi l$ de I; je remplace I par $I_1 = I - lJ_2$, et les intégrales I_1, J_2 admettent les couples primitifs de périodes:

$$\begin{pmatrix} 2i\pi, & 0 \\ 0, & 2i\pi \end{pmatrix};$$

e^{J_1} et e^{J_2} sont rationnels en x, y, z. Autrement dit, *après une substitution linéaire convenable effectuée sur* u, v, *les quantités* e^u, e^v *sont rationnelles en* x, y, z, *et inversement les fonctions uniformes* x, y, z *de* e^u, e^v *sont rationnelles en* e^u, e^v.

Dans le dernier cas que nous venons d'élucider, la surface $S(x, y, z) = 0$ correspond *birationnellement* à un plan.

33. **Théorème définitif.** Le théorème que nous avions en vue se trouve dès lors complètement démontré. Nous l'énoncerons ainsi:

Considérons deux intégrales de différentielles totales, qui ne soient point fonctions l'une de l'autre, attachées à une surface algébrique $S(x, y, z) = 0$, *et dont une au moins admet une courbe polaire; soit:*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} u = \int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy \equiv I(x, y, z), \\ v = \int P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy \equiv J(x, y, z). \end{cases}$$

Si les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par l'inversion du système (Σ) renferment rationnellement les constantes initiales x_0, y_0, z_0 (liées par la condition $S(x_0, y_0, z_0) = 0$), ces fonctions, moyennant une substitution linéaire convenable effectuée sur u, v, sont des combinaisons rationnelles d'un des systèmes de fonctions qui suivent:

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} X = u, & Y = v, & Z = 0, \\ X = u, & Y = e^v, & Z = 0, \\ X = e^u, & Y = e^v, & Z = 0, \\ X = u - \varepsilon\zeta(v), & Y = \wp(v), & Z = \wp'(v), \\ X = e^u \dfrac{\sigma(v-a)}{\sigma(v)}, & Y = \wp(v), & Z = \wp'(v), \end{cases} \quad \begin{matrix} \varepsilon = 0 \text{ ou } 1, \\ a, g_2, g_3 \text{ constantes numériques.} \end{matrix}$$

Comme les intégrales I, J présentent sûrement une courbe polaire [voir le n° 11] quand le nombre des périodes est inférieur à 4, on voit que le théorème peut s'énoncer encore ainsi:

Quand les fonctions x, y, z de u, v définies par l'inversion de deux intégrales (distinctes) de différentielles totales attachées à S renferment rationnellement les constantes initiales x_0, y_0, z_0, ce sont des fonctions hyperelliptiques (aux mêmes périodes) dégénérées [1] *ou non.*

C'est le théorème auquel nous avons ramené celui de Weierstrass [n° 7].

De plus, X, Y, Z *s'expriment rationnellement en fonction de* x, y, z. La surface S correspond birationnellement à un plan dans les trois premiers cas [où $Z = 0$], et au cylindre $Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3$ dans les deux derniers.

[1] Les systèmes de fonctions qui figurent dans le tableau (T) sont des quotients de fonctions θ (à deux variables) dégénérées [voir le n° 4].

Remarquons que les coordonnées X, Y, Z de ce cylindre se laissent mettre *de trois manières distinctes* sous la forme de fonctions hyperelliptiques dégénérées, à savoir:

$$Y = \wp(v), \qquad Z = \wp'(v)$$

avec

$$X = u, \quad \text{ou} \quad X = u - \zeta(v), \quad \text{ou} \quad X = e^{u}\frac{\sigma(v-a)}{\sigma(v)};$$

à chacune de ces représentations correspond un groupe *permutable* à deux paramètres de transformations birationnelles de la surface en elle-même, groupe obtenu en augmentant u, v de constantes arbitraires.

Enfin, donnons une dernière forme aux conclusions auxquelles nous venons de parvenir:

Quand les fonctions x, y, z de u, v définies par l'inversion de deux intégrales de différentielles totales quelconques attachées à S renferment rationnellement les constantes x_0, y_0, z_0 et admettent au plus trois couples de périodes distincts, le système (Σ), moyennant une transformation birationnelle effectuée sur la surface S et une substitution linéaire effectuée sur u, v, se ramène à une des formes:

$$(\sigma)\begin{cases} dU = dX, & dV = dY, \quad Z = 0, \\ dU = dX, & dV = \dfrac{dY}{Y}, \quad Z = 0, \\ dU = \dfrac{dX}{X}, & dV = \dfrac{dY}{Y}, \quad Z = 0, \\ dU = dX + \varepsilon\dfrac{YdY}{Z}, & dV = \dfrac{dY}{Z}, \quad Z^2 = 4Y^3 - g_2Y - g_3, \\ dU = \dfrac{dX}{X} + \dfrac{dY}{Z}\left[\zeta(\alpha) + \dfrac{\wp'(\alpha)+Z}{2[\wp(\alpha)-Y]}\right], & dV = \dfrac{dY}{Z}, \quad Z^2 = 4Y^3 - g_2Y - g_3, \\ \quad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1;\ g_2, g_3, \alpha \text{ constantes numériques}). \end{cases}$$

Quand α tend vers zéro, le dernier système (σ) tend vers le suivant:

$$(49) \qquad dU = \frac{dX}{X}, \qquad dV = \frac{dY}{\sqrt{4Y^3 - g_2Y - g_3}}.$$

34. *Comparaisons avec les fonctions inverses des intégrales hyperelliptiques.*

Les fonctions hyperelliptiques de genre 2, soit $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $\zeta(u, v)$, se laissent définir par le système:

$$(\tau) \quad \begin{cases} du = \dfrac{\xi_1 d\xi_1}{\sqrt{H(\xi_1)}} + \dfrac{\xi_2 d\xi_2}{\sqrt{H(\xi_2)}}, \\ dv = \dfrac{d\xi_1}{\sqrt{H(\xi_1)}} + \dfrac{d\xi_2}{\sqrt{H(\xi_2)}} \end{cases}$$

avec:

$$\begin{cases} H(\xi) \equiv a_5\xi^5 + a_4\xi^4 + \ldots + a_1\xi + a_0, \\ \xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \xi_1\xi_2, \qquad \zeta = \sqrt{H(\xi_1)} + \sqrt{H(\xi_2)}. \end{cases}$$

Le système (τ) dégénère quand le coefficient a_5 de H s'annule ou quand H a des racines multiples. D'après le théorème précédent, une transformation birationnelle effectuée sur x, y, z et une transformation linéaire effectuée sur u, v ramènent alors (τ) à une des formes (σ). Démontrons rapidement la réciproque: c'est-à-dire que *tout système* (σ) *est réductible à un système* (τ) *dégénéré.*

Tout d'abord, il suffit de faire $H \equiv 1$, puis $H(\xi) \equiv \xi^2$, puis $H(\xi) \equiv \xi(\xi - 1)$, pour obtenir trois systèmes (τ) qui équivalent respectivement aux trois premiers systèmes (σ).

Quant au quatrième, il ne saurait correspondre qu'à un système (τ) formé d'intégrales elliptiques de *première* et de *seconde* espèce. Considérons donc le système:

$$(\tau_1) \quad \begin{cases} du = \dfrac{\xi_1 d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \dfrac{\xi_2 d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}}, \qquad R(\xi) \equiv 4\xi^3 - g_2\xi - g_3, \\ dv = \dfrac{d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \dfrac{d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}}, \quad \xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \xi_1\xi_2, \quad \zeta = \sqrt{R(\xi_1)} + \sqrt{R(\xi_2)}. \end{cases}$$

Il est clair que $v(x, y, z)$ admet les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$;[1] mais allons voir dans un instant que ces périodes sont *primitives.* Posons:

$$\xi_1 = \wp(v_1), \qquad \xi_2 = \wp(v_2), \qquad Y = \wp(v) = \wp(v_1 + v_2),$$

[1] Puisque le point (ξ, η, ζ) décrit un cycle fermé quand ξ_1 et $\sqrt{R(\xi_1)}$ reprennent les mêmes valeurs, ξ_2 et $\sqrt{R(\xi_2)}$ ne variant pas.

d'où:

$$Y = -(\xi_1 + \xi_2) + \frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{R(\xi_1)} - \sqrt{R(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2}\right\}^2$$
$$= \rho(\xi, \eta, \zeta), \quad (\rho \text{ rationnel});$$

$\sqrt{R(Y)} = \wp'(v_1 + v_2)$ s'exprime de même rationnellement en ξ, η, ζ. On a ensuite:

$$u = -[\zeta(v_1) + \zeta(v_2)] + \text{const.} = -\zeta(v) + \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{R(\xi_1)} - \sqrt{R(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2}\right] + \text{const.}$$

La transformation rationnelle:

$$X = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{R(\xi_1)} - \sqrt{R(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2}\right] = \rho_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad Y = -\xi + X^2$$

ramène donc (τ_1) au système:

$$(\sigma_1) \quad du = dX + \frac{YdY}{\sqrt{R(Y)}}, \qquad dv = \frac{dY}{\sqrt{R(Y)}}, \quad \text{avec} \quad S(X, Y, \zeta) = 0.$$

toutes les périodes de v dérivent sûrement des périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, puisque Y et $\sqrt{R(Y)}$ reprennent les mêmes valeurs quand le point (ξ, η, ζ) décrit un cycle fermé. Il suit de là que ξ, η, ζ sont uniformes, donc rationnels, en $X, Y, \sqrt{R(Y)}$. Une transformation *birationnelle* ramène ainsi (τ_1) à (σ_1) et la surface[1] S' au cylindre $Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3$, si S' désigne la surface que définissent dans l'espace (ξ, η, ζ) les égalités:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \xi_1\xi_2, \qquad \zeta = \sqrt{4\xi_1^3 - g_2\xi_1 - g_3} + \sqrt{4\xi_2^3 - g_2\xi_2 - g_3}.$$

Remarquons qu'en remplaçant u par $\frac{u}{a}$ et X par $\frac{X}{a}$, on ramène (τ_1) à la forme:

$$(\sigma') \qquad du = dX + \frac{aYdY}{Z}, \qquad dv = \frac{dY}{Z}, \qquad Z^2 = R(Y),$$

système qui comprend en particulier (pour $a = 0$) le quatrième système (σ) où $\varepsilon = 0$. Mais pour $a = 0$ la transformation de passage de (σ') à τ_1 devient illusoire. Le quatrième système (σ) où ε est nul ne correspond donc à aucun système (τ_1), mais il dégénère d'un transformé birationnel de τ_1.

[1] Ce résultat a déjà été établi par M. PICARD, Mém. couronné *Sur les fonctions algébriques de deux variables* [p. 101—104].

35. Passons au dernier système (σ) qui ne peut correspondre qu'à un système (τ) formé d'intégrales elliptiques de *première* et de *troisième* espèce. Considérons donc le système:

$$(\tau_2)\quad \begin{cases} du = \dfrac{\wp'(\lambda)d\xi_1}{[\xi_1-\wp(\lambda)]\sqrt{R(\xi_1)}} + \dfrac{\wp'(\lambda)d\xi_2}{[\xi_2-\wp(\lambda)]\sqrt{R(\xi_2)}}, \qquad R(\xi)\equiv 4\xi^3-g_2\xi-g_3, \\ dv = \dfrac{d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \dfrac{d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}}, \quad \xi=\xi_1+\xi_2, \quad \eta=\xi_1\xi_2, \quad \zeta=\sqrt{R(\xi_1)}+\sqrt{R(\xi_2)}. \end{cases}$$

Posons, comme tout-à-l'heure,

$$\xi_1=\wp(v_1), \qquad \xi_2=\wp(v_2), \qquad Y=\wp(v)=\wp(v_1+v_2), \qquad \sqrt{R(Y)}=\wp'(v);$$

Y et $\sqrt{R(Y)}$ sont encore rationnels en ξ, η, ζ. On a ensuite:

$$e^u = \frac{\sigma(v_1-\lambda)\,\sigma(v_2-\lambda)}{\sigma(v_1+\lambda)\,\sigma(v_2+\lambda)}e^{2\zeta(\lambda)(v_1+v_2)}$$

$$= e^{2\zeta(\lambda)v}\frac{\sigma(v)}{\sigma(v+2\lambda)}\frac{\sigma(v_1-\lambda)\sigma(v_2-\lambda)\sigma(v_1+v_2+2\lambda)}{\sigma(v_1+\lambda)\sigma(v_2+\lambda)\sigma(v_1+v_2)} \equiv e^{2\zeta(\lambda)v}\frac{\sigma(v)}{\sigma(v+2\lambda)}\chi(v_1, v_2),$$

χ désignant une fonction elliptique (symétrique) de v_1, v_2, aux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$, c'est-à-dire une fonction rationnelle de (ξ, η, ζ), soit $\chi=\rho_1(\xi, \eta, \zeta)$. La transformation rationnelle: $X=\rho_1(\xi, \eta, \zeta)$, $Y=\rho(\xi, \eta, \zeta)$ ramène donc (τ_2) au système:

$$du = \frac{dX}{X} + \{2\zeta(\lambda)+\zeta(v)-\zeta(v+2\lambda)\}dv, \qquad dv=\frac{dY}{\sqrt{R(Y)}},$$

ou, si on veut, en posant $\alpha=-2\lambda$ et en remplaçant u par $u_1-2v\zeta(\lambda)$, à la forme

$$(\sigma'')\qquad du_1=\frac{dX}{X}+\frac{dY}{\sqrt{R(Y)}}\left[\zeta(\alpha)+\frac{\wp'(\alpha)+\sqrt{R(Y)}}{2[\wp(\alpha)-Y]}\right], \qquad dv=\frac{dY}{\sqrt{R(Y)}},$$

c'est-à-dire au cinquième système (σ). Le raisonnement fait au numéro précédent montre que $2\omega_1, 2\omega_2$ sont des périodes primitives de l'intégrale $v(\xi, \eta, \zeta)$, et que, par suite, ξ, η, ζ sont rationnels en $X, Y, \sqrt{R(Y)}$. Le système (τ_2) est ainsi ramené *birationnellement* au dernier système (σ) le plus général, à cela près que pour $\alpha=0+$ période, (c'est-à-dire pour $\lambda=\frac{1}{2}$ période), la transformation de passage entre (τ_2) et (σ'') devient

illusoire. Le système (49) n'est donc équivalent à aucun système (τ_2), mais il dégénère d'un transformé birationnel de (τ_2).

La transformation de passage de (σ'') à (τ_2) nous fait connaître une nouvelle correspondance birationnelle entre le cylindre $Z^2 = R(Y)$ et la surface S'.

36. *Discussion d'une méthode de démonstration proposée par M. Picard.*

M. PICARD a indiqué[1] du théorème de WEIERSTRASS une démonstration qui repose sur les principes intuitifs suivants:

Considérons trois fonctions uniformes $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par l'inversion de deux intégrales de différentielles totales $u = I$, $v = J$ attachées à la surface algébrique $S(x, y, z) = 0$; soit

$$(50) \qquad du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy, \qquad dv = P_1(x,y,z)dx + Q_1(x,y,z)dy.$$

Introduisons deux autres intégrales de différentielles totales attachées à la surface $\Sigma(\xi, \eta, \zeta) = 0$, soit

$$(51) \qquad \begin{cases} I_1 = \int H(\xi, \eta, \zeta)d\xi + K(\xi, \eta, \zeta)d\eta, \\ J_1 = \int H_1(\xi, \eta, \zeta)d\xi + K_1(\xi, \eta, \zeta)d\eta, \end{cases}$$

telles que chacun de leurs couples de périodes soit égal à un couple de périodes des deux premières. Les fonctions x, y, z de ξ, η, ζ obtenues en remplaçant u et v par I_1 et J_1 sont évidemment des fonctions *uniformes* du point (ξ, η, ζ) de Σ; quand, de plus, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont *méromorphes*, les singularités *essentielles* des fonctions x, y, z de (ξ, η, ζ) (s'il en existe) sont nécessairement distribuées suivant les courbes *polaires* de I_1, J_1. Enfin, quand les fonctions ξ, η, ζ de u, v, obtenues en posant $u = I_1$, $v = J_1$, sont elles-mêmes *uniformes* et quand les couples de périodes sont les mêmes pour (I, J) et pour (I_1, J_1), la correspondance entre (x, y, z) et (ξ, η, ζ) est *biuniforme.*

Ceci posé, plaçons-nous dans l'hypothèse où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, définies par le système (50), non seulement sont *méromorphes*, mais renferment *rationnellement* les constantes d'intégration (x_0, y_0, z_0). M. PICARD se propose d'établir qu'on peut choisir pour système (51) un système *hyperelliptique*, tel que la correspondance entre (x, y, z) et (ξ, η, ζ) soit non seulement **biuniforme** mais **birationnelle.** La démonstration (voir le n° 8)

[1] Voir la note 1, pag. 11.

n'a besoin d'être faite que dans le cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ ont au plus trois couples de périodes distincts.

37. L'illustre géomètre distingue deux cas principaux, suivant qu'il existe ou non des périodes polaires. Pour plus de clarté, discutons le premier cas dans l'hypothèse particulièrement simple où les couples de périodes se réduisent à deux, tous deux logarithmiques, soit les couples $\begin{pmatrix} 2i\pi, & 0 \\ 0, & 2i\pi \end{pmatrix}$, correspondant respectivement à deux courbes polaires C_1 et C_2.

M. Picard introduit alors le système (τ) dégénéré, [loc. cit. p. 113, 114]:

$$(52)\quad \begin{cases} du = \dfrac{a d\xi_1}{(\xi_1 - a^2)\sqrt{\xi_1}} + \dfrac{a d\xi_2}{(\xi_2 - a^2)\sqrt{\xi_2}}, & \xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \xi_1\xi_2, \\ dv = \dfrac{b d\xi_1}{(\xi_1 - b^2)\sqrt{\xi_1}} + \dfrac{b d\xi_2}{(\xi_2 - b^2)\sqrt{\xi_2}}, & \zeta = \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2}. \end{cases}$$

Les fonction suniformes de x, y, z de ξ, η, ζ ne sauraient admettre de singularités essentielles en dehors des quatre courbes polaires $\xi_1 = a^2$, $\xi_1 = b^2$, $\xi_2 = a^2$, $\xi_2 = b^2$. M. Picard *admet*[1] que le point (x, y, z) tend vers un point *déterminé* de la courbe polaire C_1, quand ξ_1 tend vers a^2, $\sqrt{\xi_1}$ *ayant un certain signe*, (ξ_2 et $\sqrt{\xi_2}$ étant invariables et quelconques). En s'appuyant sur le fait que (x_0, y_0, z_0) figurent rationnellement dans $x(u, v)$, $y(u, v)$ $z(u, v)$, il montre ensuite qu'il en va de même pour l'autre signe de $\sqrt{\xi_1}$, et il en conclut que les fonctions x, y, z de ξ, η, ζ sont dénuées de singularités essentielles et par suite rationnelles.

En réalité, ce qui est quasi-évident c'est que le point (x, y, z) est très voisin d'une courbe polaire de S dès que ξ_1 est voisin de a^2, mais ***il n'en résulte nullement que*** (x, y, z) ***tende vers un point déterminé.*** Prenons, par exemple, le système:

$$(53)\qquad du = \frac{dx}{x}, \qquad dv = \frac{dy}{y} + dx\left[\frac{1}{x^2} - 1\right],$$

[1] M. Picard se borne à dire (à la notation près) [loc. cit. p. 107 et 114] que, si ξ_1 tend vers a^2 (le radical $\sqrt{\xi_2}$ ayant un signe convenable), la période polaire est pour u égale à $2\pi i$. »Donc quand ξ_1 tend vers a^2, $\sqrt{\xi_1}$ ayant un certain signe, quels que soient d'ailleurs ξ_2 et $\sqrt{\xi_2}$, le point (x, y, z) tendra vers un point de la courbe logarithmique C_1.»

qui définit les fonctions *méromorphes:* $x = e^u$, $y = e^{v+e^u+e^{-u}}$; les relations entre x, y et ξ_1, ξ_2 sont ici:

$$x = c\frac{(\sqrt{\xi_1} - a)(\sqrt{\xi_2} - a)}{(\sqrt{\xi_1} + a)(\sqrt{\xi_2} + a)}, \qquad y = c'\frac{(\sqrt{\xi_1} - b)(\sqrt{\xi_2} - b)}{(\sqrt{\xi_1} + b)(\sqrt{\xi_2} + b)} e^{x+\frac{1}{x}}$$

(c, c' constantes arbitraires);

x tend vers o ou ∞ suivant que $\sqrt{\xi_1}$ tend vers $+a$ ou $-a$, mais, *dans l'un et l'autre cas, $y(\xi_1, \xi_2)$ est complètement indéterminée.*

Il est donc indispensable de démontrer que (x, y, z) *tend vsrs un point déterminé* quand $\sqrt{\xi_1}$ tend vers une des valeurs $a, -a$, et *cette démonstration ne peut être faite sans invoquer l'hypothèse que $x(u, v)$, $y(u, v)$ renferment rationnellement* (x_0, y_0, z_0).[1]

La même objection s'applique au raisonnement [loc. cit. p. 106, 108] qui concerne le cas où un seul des trois couples de périodes est supposé polaire.

48. *Quand il n'existe pas de périodes polaires,* M. Picard s'appuie seulement sur l'hypothèse que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont *méromorphes* et il arrive à cette conclusion [p. 110—114] que ce sont alors des fonctions hyperelliptiques dégénérées. Or l'exemple:

$$(54) \qquad du = -\frac{dx}{x^2}, \qquad dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} + \frac{2dx}{x^3}$$

qui engendre les fonctions méromorphes

$$x = \frac{1}{u}, \qquad y = \wp(v + u^2),$$

suffit à mettre cette conclusion en défaut.

---

[1] La transformation $X = \frac{(\sqrt{\xi_1} - a)(\sqrt{\xi_2} - a)}{(\sqrt{\xi_1} + a)(\sqrt{\xi_2} + a)}$, $Y = \frac{(\sqrt{\xi_1} - b)(\sqrt{\xi_2} - b)}{(\sqrt{\xi_1} + b)(\sqrt{\xi_2} + b)}$ ramène le système (52) à la forme: $du = \frac{dX}{X}$, $dv = \frac{dY}{Y}$. Le raisonnement de M. Picard revient à *admettre* que (un couple de résidus de I, J étant $+1$ et o) la valeur $X = 0$ est un point non essentiel pour les fonctions uniformes x, y, z de X, Y, et à *démontrer* qu'il en va de même pour $X = \infty$. Or la discussion qui fait l'objet des n°s 25—31 n'a d'autre but que d'établir le fait admis ici.

Tout d'abord, la discussion de la courbe polaire non logarithmique (telle qu'elle est exposée aux pages 112—113) prête à la même objection que je viens de mettre en évidence pour une courbe logarithmique. Mais de plus cette discussion repose essentiellement sur le lemme suivant qu'énonce tout d'abord M. PICARD (p. 110 et 112): »Quand les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ sont uniformes (sans toutefois être algébriques), toute courbe polaire non logarithmique laisse finie une combinaison linéaire de u, v.» Or dans l'exemple (54), où $x(u, v)$, $y(u, v)$ sont *méromorphes*, aucune combinaison linéaire de u, v ne reste finie pour $x = 0$. Pour démontrer ce lemme, il est nécessaire de s'appuyer sur le fait que les constantes (x_0, y_0, z_0) figurent *rationnellement* dans $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, et cette démonstration me paraît exiger une discussion entièrement identique à celle des n°s 22—24.

En définitive, — et sans insister sur d'autres objections qui compliqueraient encore le raisonnement — la méthode de M. PICARD, si intéressante qu'elle soit en elle-même, soulève (en outre de difficultés nouvelles) les mêmes difficultés qui ont exigé plus haut la discussion des n°s 22—31, la seule partie un peu délicate de notre démonstration.

Sur le cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont uniformes sans renfermer rationnellement les constantes (x_0, y_0, z_0).

39. Il est impossible, après les considérations précédentes, de ne pas se poser ce problème:

Quand les fonctions inverses $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ de deux intégrales de différentielles totales sont uniformes, quelle est la nature de ces fonctions?

Ce difficile problème se rattache évidemment à l'étude des équations différentielles à intégrale générale uniforme. Je me bornerai à énoncer ici les résultats auxquels conduit la méthode que j'ai appliquée aux équations du second ordre.[1]

Par hypothèse, les constantes x_0, y_0, z_0 figurent sous forme transcendante dans $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Mais je montre (et c'est là toute la difficulté

[1] Voir le Bulletin de la soc. math. de France (tome 28, p. 201—211) et les Acta mathematica (tome 25, p. 1—80).

de la question) qu'on *peut toujours choisir les deux constantes arbitraires de façon qu'une d'elles entre algébriquement dans* x, y, z. Il est dès lors aisé d'élucider la nature des transcendantes x, y, z de (u, v) et même de traiter ce problème plus général:

Quand les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, *engendrées par l'inversion de deux intégrales de différentielles totales, n'ont qu'un nombre fini de branches et dépendent algébriquement d'une des constantes d'intégration (convenablement choisies), quelle est la nature de ces fonctions?*

La réponse s'énonce ainsi: *Une transformation algébrique effectuée sur* x, y *et une substitution linéaire effectuée sur* u, v, *ramènent les deux différentielles totales à une des formes:* [1]

(I) $$dv = dy,$$

ou

(II) $$dv = \frac{dy}{y},$$

ou

(III) $$dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$$

avec:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(IV)} \quad du = \frac{dx}{x} + H(y)dy, \\ &\textit{ou} \\ &\text{(V)} \quad du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3}} + H(y)dy \end{aligned}\right\} (H \text{ algébrique}).$$

Les fonctions x, y de (u, v) correspondantes sont:

$$y = v, \quad \text{ou} \quad y = e^v, \quad \text{ou} \quad y = \wp(v, g_2, g_3)$$

avec:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(VI)} \quad x = e^{u + K(v)} \\ &\text{ou} \\ &\text{(VII)} \quad x = \wp_1(u + K(v)), \quad \wp_1(u) = \wp(u, \gamma_2, \gamma_3), \end{aligned}\right\} K(v) = -\int H[y(v)] \frac{dy}{dv} dv,$$

[1] Je suppose bien entendu qu'on écarte le cas (déjà traité) où les deux constantes, convenablement choisies, figurent algébriquement dans x, y.

Il faut que $e^{K(v)}$ (dans le cas VI), et $\wp_1[K(v)]$ (dans le cas VII) soient des fonctions de v *à un nombre fini de valeurs.* Ceci revient à dire que l'intégrale abélienne $\int H(y)dy$, [en dehors de la (ou des deux) périodes qui correspondent à la (ou aux deux) périodes de v] ne doit admettre que des périodes de la forme $\frac{2i\pi}{l}$ (dans le cas VI) et $\frac{2m\omega_1' + 2n\omega_2'}{l}$ (dans le cas VII): l, m, n sont des entiers, et $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ les périodes de $\wp_1$.

Dans le cas (VII), les fonctions x, y de (u, v) sont 4 fois périodiques et présentent des singularités essentielles à distance finie, du moment que $\int H(y)dy$ n'est pas de première espèce.[1] Les quatre couples de périodes ne satisfont pas en général à la condition de RIEMANN.

Dans le cas (VI), les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ peuvent n'admettre comme singularités essentielles que $u = \infty$ et $v = \infty$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que v vérifie une des équations I ou II (mais non l'équation III); il faut ensuite (et il suffit) que $\int H(y)dy$ ne devienne infini que logarithmiquement en dehors du point $y = \infty$ dans le cas I, et des points $y = 0$, $y = \infty$ dans le cas II. Quand ces conditions ne sont pas remplies, $x(u, v)$ présente des points singuliers essentiels à distance finie dans le champ des v.

Quelques applications du théorème de Weierstrass.

40. Je voudrais signaler rapidement quelques applications du théorème de WEIERSTRASS.

Une première application est relative aux transformations birationnelles des surfaces algébriques.

Au sujet de ces transformations, M. PICARD[2] a établi ce théorème qui a une importance considérable dans la théorie des surfaces algébriques:

---

[1] Quand $\int H(y)dy$ est de première espèce, on rentre dans le cas où les constantes figurent algébriquement dans x, y.

[2] Loc. cit. p. 65—99; voir aussi mes *Leçons de Stockholm*, p. 255—288, et les récentes recherches de MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES (Math. Annalen, 1899, et Comptes-Rendus de l'Académie des Sc. de Paris, 5 novembre 1900).

»Quand une surface algébrique S admet un faisceau continu de transformations birationnelles, ou bien elle renferme une famille de courbes de genre o ou 1, *ou bien elle possède deux intégrales de différentielles totales*

$$u = \int P_1 dx + Q dy, \qquad v = \int P_1 dx + Q_1 dy,$$

telles que les fonctions inverses $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *soient uniformes et dépendent rationnellement des constantes initiales* (x_0, y_0, z_0).»

Occupons-nous seulement de *ce dernier cas:* le théorème de WEIERSTRASS énoncé au n° 33, nous montre que la surface S est alors une surface *hyperelliptique, dégénérée ou non.*

41. Une autre application du théorème de WEIERSTRASS se rencontre dans l'étude analytique *des équations différentielles.* J'ai montré notamment [1] qu'il joue un rôle essentiel dans la théorie des *équations du second ordre dont l'intégrale générale renferme algébriquement les deux constantes.*

Limitons-nous, pour le faire comprendre, à un beau résultat établi par M. PICARD.

Soit $S\left(x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}\right) = 0$ une équation (algébrique) du second ordre, où la variable indépendante u ne figure pas explicitement. Quand l'intégrale génerale $x(u)$ de cette équation dépend *rationnellement* des constantes initiales x_0, x'_0, x''_0 [liées par la relation $S(x_0, x'_0, x''_0) = 0$], M. PICARD a montré que deux cas sont possibles:

1° ou bien $x(u)$ est une fonction rationnelle soit de u, soit de e^{gu}, soit de $\wp(u, g_2, g_3)$, $\wp'(u, g_2, g_3)$, [g, g_2, g_3 constantes numériques];

2° ou bien, si on pose: $y = x'$, $z = x''$, la surface $S(x, y, z) = 0$ possède deux intégrales de différentielles totales telles qu'en égalant la première à $u + a$, la seconde à une constante b, la fonction $x(u + a, b)$ ainsi définie soit précisément l'intégrale générale de l'équation donnée.

Le théorème du n° 33 exprime dès lors que, dans le cas 2°, *la fonction* $x(u)$ *s'obtient en remplaçant, dans une certaine fonction hyperelliptique (dégénérée ou non), un des arguments par* $u + a$ *et le second par une constante* b; le cas 1° rentre, en particulier, dans ce mode de génération.

[1] *Leçons de Stockholm,* p. 351—394.

[1] Loc. cit. p. 129—142.

Plus généralement, considérons un système différentiel: $x'_u = H(x, y)$, $y'_u = K(x, y)$, où H et K sont *algébriques en x, y et indépendants de u: quand l'intégrale générale $x(u)$, $y(u)$ de ce système dépend algébriquement des deux constantes, j'ai montré*[1] *que x et y sont des combinaisons algébriques des deux fonctions obtenues en remplaçant dans deux fonctions hyperelliptiques dégénérées ou non (aux mêmes périodes) un des arguments par $(u + a)$ et l'autre par b.*

42. *Complément au théorème de Weierstrass.* Ces applications suffisent à faire comprendre l'importance du théorème de WEIERSTRASS en dehors même de la théorie des fonctions abéliennes. Je me servirai seulement du dernier résultat énoncé pour compléter, sur un point, le théorème même de WEIERSTRASS. Dans l'énoncé de ce théorème (n° 2), nous avons supposé que les deux fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ étaient **distinctes**. *Qu'advient-il quand il en est autrement?*

Soit donc $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ deux fonctions de u, v *dont le jacobien est nul*, et qui admettent *un théorème d'addition.* Je vais montrer que *φ et ψ sont des combinaisons algébriques des deux fonctions obtenues en remplaçant dans un couple de fonctions hyperelliptiques (aux mêmes périodes), un des arguments par $\alpha u + \beta v$, et l'autre par zéro:* les fonctions hyperelliptiques peuvent d'ailleurs être *dégénérées.*

Posons, comme au n° 5, $x = \varphi(u + u_0, v + v_0)$, $y = \psi(u + u_0, v + v_0)$, et $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Par hypothèse, on a: $y = F(x)$; et d'autre part, d'après le théorème d'addition, x et y s'expriment *algébriquement* à l'aide de x_0, y_0, soit:

(55) $$x = A(x_0, y_0, u, v) \equiv A(x_0, F(x_0), u, v), \quad [A \text{ algébrique en } x_0, y_0].$$

De cette équation, on tire aussitôt:[2]

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u_0}}{\dfrac{\partial x}{\partial v_0}} = \frac{\left[\dfrac{\partial A}{\partial x_0} + \dfrac{\partial A}{\partial y_0} F'(x_0)\right]\dfrac{\partial x_0}{\partial u_0}}{\left[\dfrac{\partial A}{\partial x_0} + \dfrac{\partial A}{\partial y_0} F'(x_0)\right]\dfrac{\partial x_0}{\partial v_0}} = \frac{\dfrac{\partial x_0}{\partial u_0}}{\dfrac{\partial x_0}{\partial v_0}};$$

[1] *Leçons de Stockholm*, p. 351—360.

[2] Il est loisible d'admettre qu'une des expressions $\frac{\partial A}{\partial x_0} + \frac{\partial A}{\partial y_0} F'(x_0)$, $\frac{\partial B}{\partial x_0} + \frac{\partial B}{\partial y_0} F'(x_0)$, n'est pas identiquement nul, (soit la première); sinon, $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ seraient nuls, et x, y seraient des constantes.

le rapport $\dfrac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}}$ est donc indépendent de u, v; autrement dit, $\varphi(u, v)$ vérifie l'équation: $\beta\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$ (α, β numériques); $\varphi(u, v)$ *est donc une simple fonction de* $\alpha u + \beta v$; il en est de même par suite de $\psi(u, v) = F(\varphi)$. Il est loisible, en remplaçant u par $\alpha u + \beta v$, de supposer $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Ceci posé, reprenons les égalités:

$$x = \varphi(u + u_0) = A(x_0, y_0, u), \qquad y = \psi(u + u_0) = B(x_0, y_0, u),$$

et éliminons x_0, y_0 entre les équations: $x = A$, $y = B$, $x'_u = \frac{\partial A}{\partial u}$, $y'_u = \frac{\partial B}{\partial u}$; il vient:

$$(56) \qquad \frac{dx}{du} = H(x, y, u), \quad \frac{dy}{du} = K(x, y, u) \quad (H, K \text{ algébriques en } x, y),$$

Les fonctions $x = \varphi(u + u_0)$, $y = \psi(u + u_0)$ vérifient, en particulier, ce système; il existe donc au moins un couple de fonctions $\chi(x)$, $\tau(y)$ tel que les solutions du système différentiel:

$$du = \chi(x)dx = \tau(y)dy$$

appartiennent au système (56). Si les fonctions $\chi(x)$, $\tau(y)$ qui jouissent de cette propriété dépendent au moins d'une constante arbitraire, u ne figure pas dans H, K; si non, χ et τ se déduisent *algébriquement* du système (56) et sont, par suite, algébriques respectivement en x, y. Dans le premier cas, le théorème qui termine le n° 41 s'applique au système (56); dans le second cas, $x(u)$ est une fonction algébrique de $\wp(u, g_2, g_3)$ ou de e^{gu} ou de u, et de même y est une fonction algébrique de $\wp_1(u, \gamma_2, \gamma_3)$, ou de $e^{\gamma u}$ ou de u. Dans l'un et l'autre cas, *x et y sont des combinaisons algébriques de deux fonctions obtenues en remplaçant, dans un couple (dégénéré ou non) de fonctions hyperelliptiques, un des arguments par u et l'autre par* 0. C. Q. F. D.

Extension aux fonctions de n variables.

43. Le théorème de Weierstrass se démontre pour les fonctions de n variables par une méthode absolument identique à celle que nous

avons développée plus haut. Toute la difficulté revient à démontrer ce théorème:

Si n intégrales distinctes[1] *de différentielles totales, soit*

$$u_j = \int P_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})dx_1 + Q_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})dx_2 + \ldots$$
$$+ T_j(x_1, \ldots, x_{n+1})dx_n,$$

attachées à la surface algébrique [*à* $(n+1)$ *dimensions*] $S(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$, *engendrent par leur inversion des fonctions uniformes* $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_{n+1}(u_1, \ldots, u_n)$, *qui renferment rationnellement les constantes* $x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0$, *ces fonctions forment un système* (*dégénéré ou non*) *de fonctions abéliennes aux mêmes périodes.*

Le théorème est démontré pour $n = 1$ et $n = 2$. On admet qu'il est vrai pour $n - 1$ et on l'établit pour n. A cet effet, on s'appuie sur un lemme entièrement analogue au lemme A du n° 20, et la discussion d'une multiplicité polaire (logarithmique ou non), soit $x_1 = 0$, des intégrales u_j, conduite comme aux n°s 22—32, montre que, moyennant une substitution linéaire convenable effectuée sur les u, les fonctions $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont toutes rationnelles soit en u_1, soit en e^{u_1}; dès lors, en raisonnant comme aux n°s 12—19, on est aussitôt ramené au cas de $(n-1)$ variables.

Paris, le 15 février 1902.

---

[1] J'entends par là que les n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ de $x_1, \ldots, x_n$ sont *distinctes*, autrement dit que le déterminant $\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & \ldots & T_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_n & Q_n & \ldots & T_n \end{vmatrix}$ n'est pas identiquement nul.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

PAR

R. LIOUVILLE
À PARIS.

ABEL a consacré quelques pages (Oeuvres, tome 2, n° 5), à l'étude des cas dans lesquels on sait intégrer l'équation suivante,

$$(1)\qquad (y + s)\frac{dy}{dx} + p + qy + ry^2 = 0,$$

où p, q, r, s désignent des fonctions de x.

Ce type d'équations différentielles, le plus simple de tous ceux du premier ordre, après celui de RICCATI, présente, pour cette raison, un véritable intérêt et, depuis les travaux d'ABEL, il a été, à plusieurs reprises et sous des formes diverses, l'objet d'assez nombreuses recherches.

On peut, en ce qui le concerne, se placer à deux points de vue bien différents et presque opposés, selon que l'on s'attache à reconnaitre s'il existe une intégrale, dépendant de y d'une façon indiquée, par exemple algébrique, ou bien à trouver les caractères essentiels de la relation établie, d'après la nature même de l'équation proposée, entre l'inconnue y et la constante arbitraire qui s'y trouve impliquée, abstraction faite d'ailleurs du choix adopté pour la variable x.

Voici comment on peut concevoir ce qu'il y a d'essentiel dans une relation de cette espèce: il est clair que, si la formule

$$(1)\qquad y = f(x, c),$$

définit, quel que soit c, une solution de l'équation (1), il est permis de substituer à ce paramètre une fonction $\varphi(c)$, quelconque, ne renfermant pas x; après cette substitution, l'inconnue, y, conserve certaines propriétés

inaltérées, parce que c'est en fait une fonction de deux variables; ces propriétés doivent être regardées comme des caractères propres au type d'équations différentielles qu'on étudie; ils sont visiblement liés à la nature de ses invariants, mais, pour découvrir cette liaison si cachée, les moyens dont on dispose ne possèdent jusqu'à présent aucune généralité. Tout se réduit donc encore à la discussion de quelques cas particuliers, les plus nombreux et variés que l'on sache construire, afin de préparer des vues plus étendues sur la question.

C'est ainsi que, dans le Mémoire cité, ABEL déduit d'hypothèses diverses, relatives au multiplicateur, des cas d'intégration, qui semblent même d'abord former une suite indéfinie. J'aurai l'occasion de donner un peu plus de précision à ces résultats.

D'autres, dépendant d'une analyse toute différente, ont été signalés dans des travaux plus récents ou le seront dans cet article.

Je m'attacherai surtout à faire ressortir ce qui est spécial au type d'équations différentielles dont il s'agit.

Enfin, j'aurai quelques remarques à présenter au sujet d'une de ces équations, dont l'intégrale n'est pas connue et ne peut être algébrique, bien que l'on en sache trouver une propriété simple et entièrement explicite.

---

§ 1. *Invariants et forme canonique.*

Au sujet de l'équation générale (1), ABEL démontre d'abord qu'elle peut être réduite à la suivante

$$\frac{z\,dz}{dx} + p + qz = 0, \tag{2}$$

ou à celle-ci

$$(p + qz)\frac{dz}{dx} + z = 0, \tag{2'}$$

p et q étant des fonctions de la seule variable x. Dans ce qui va suivre, nous adopterons une forme un peu différente. Si l'on établit entre l'inconnue définie par l'équation (1), et une autre inconnue, z, cette relation

$$y + s = \frac{1}{z}, \tag{3}$$

on reconnait sans peine que la fonction z est déterminée par une équation de cette espèce,

$$\frac{dz}{dx} + a_1 z^3 + 3a_2 z^2 + 3a_3 z + a_4 = 0, \tag{4}$$

dans laquelle $a_1, a_2, \ldots, a_4$ ne dépendent que de x; c'est à cette forme que nous nous arrêterons d'ordinaire, mais il va de soi que cette manière de représenter les équations différentielles dont il s'agit n'est d'aucune importance.

Le type (4) se conserve 1° quand on change la variable d'une façon arbitraire, la nouvelle, x_1, étant liée à l'ancienne par la relation

$$\frac{dx_1}{dx} = f(x);$$

2° lorsqu'on remplace l'inconnue, z, par une autre, z_1, qui lui est liée par la formule,

$$z = z_1\varphi + \psi \tag{2}$$

φ et ψ étant des fonctions quelconques de x. J'ai montré déjà (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 6 septembre 1886), que, pendant ces transformations, l'expression

$$s_3 = a_2 a_1' - a_1 a_2' + a_1^2 a_4 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3 \tag{6}$$

est un invariant relatif, *de poids* 3, c'est à dire se reproduit, multipliée par $\left(\frac{\varphi}{f}\right)^3$ et ne contient pas ψ; en outre, si s_{2m-1} représente un invariant, de poids $2m - 1$, il en existe un autre, donné par l'expression

$$s_{2m+1} = a_1 s_{2m-1}' - (2m - 1)[a_1' + 3(a_2^2 - a_1 a_3)]s_{2m-1}. \tag{7}$$

Celui-ci est de poids $2m + 1$ et il est clair que les relations (6) et (7) permettent de construire des invariants absolus, en nombre aussi grand que l'on veut et de définir ainsi les caractères essentiels de chaque équation analogue à (4), par une relation entre deux de ces invariants, (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 12 septembre 1887).

En reprenant ces recherches pour l'équation (4) et les étendant à d'autres types moins particuliers, Mr Appell adoptait le même point de vue dans son Mémoire *Sur les invariants de quelques équations différentielles*,

(Journal de Mathématiques, tome 5, 1889). Il donnait alors le moyen de réduire l'équation proposée à la forme canonique,

(8) $$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J(X),$$

dont le seul coefficient variable, J, est un invariant absolu.

Toutefois ce n'est point ce que j'ai appelé un *invariant proprement dit*, je veux dire qu'il ne se déduit pas de $a_1, a_2, \ldots, a_4$ par de simples opérations algébriques et différentielles; il exige au contraire une quadrature. Par suite, quand les coefficients de l'équation proposée, (4), sont des fonctions algébriques de x, sa représentante, (8), ne jouit pas, en général, de cette propriété. C'est pour éviter cet inconvénient que nous emploierons une autre équation canonique; voici comment on y parvient.

Soit $t = s_5^3 s_3^{-5}$, un invariant absolu, qui sera pris pour la nouvelle variable et soit z_1, une inconnue liée à z par la relation

(9) $$z = \frac{s_3^2 z_1}{a_1 s_5} - \frac{a_2}{a_1};$$

Un calcul des plus simples donne, pour l'équation différentielle transformée de (4), la suivante,

(10) $$\frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{T}\left(z_1^3 + \frac{1 - T}{3t} z_1 + \frac{1}{t}\right) = 0,$$

dans laquelle,

(11) $$T = \frac{3 s_3 s_7 - 5 s_5^2}{s_5^2},$$

est un invariant absolu. L'équation (10) est canonique, puisque ses coefficients sont des invariants absolus et il est clair qu'entre T et t il existe une relation, caractéristique pour chaque équation différentielle du type (4). A ce théorème, qui apparait d'abord sur l'équation (10), équivaut celui que Mr Appell a démontré dans son Mémoire déjà cité.

Il y a des cas où la forme (10) ne peut être adoptée; il se présentent si $t = 0$, $t = \infty$ ou $T = 0$. Dans la dernière hypothèse,

(12) $$3 s_3 s_7 = 5 s_5^2$$

et, d'après l'identité (7), ceci signifie que

$$(13)\qquad \frac{3s_6'}{s_6} = \frac{5s_3'}{s_3},$$

c'est à dire $t =$ Constante; quant aux premières hypothèses ($t = 0, t = \infty$), elles sont des cas particuliers de la précédente. J'ai montré ailleurs (C. R de l'Ac. des Sc., 6 sept. 1886), comment alors l'équation (4) doit être traitée; la propriété essentielle de son intégrale s'exprime, si l'on veut, de cette manière curieuse.

Si l'on introduit une inconnue nouvelle, Y, ainsi définie,

$$(14)\qquad z = \frac{dY}{dx}\varphi(x),$$

après un choix convenable de φ, il y a entre Y et x, une équation de cette espèce

$$(15)\qquad c_1 f_1(x, Y) + c_2 f_2(x, Y) + c_3 f_3(x, Y) = 0;$$

c_1, c_2, c_3 sont des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans f_1, f_2, f_3 et, par suite, figurent toutes trois, au premier degré seulement, dans l'intégrale, (loc. cit., 6 sept. 1886).

J'indiquerai, à la fin de ce Mémoire, § 4, toute une série de cas présentant une grande analogie avec celui qui vient d'être indiqué.

§ 2. *Cas d'intégration.*

Les exemples traités par Abel sont tous obtenus par une étude du multiplicateur. On suppose que l'équation différentielle,

$$(16)\qquad zz' + p + qz = 0,$$

admette un multiplicateur, μ, dont le logarithme soit une fonction entière de z, les coefficients de cette dernière pouvant d'ailleurs renfermer x. Les conditions auxquelles cette fonction se trouve ainsi assujettie, quel que soit son degré, sont calculées sans peine et l'on semble possèder par ce moyen une série indéfinie de cas d'intégration. En fait, c'est pour le second degré seulement que la forme explicite de l'équation (16) a été in-

diquée par Abel. En prenant $q = 1$, chose permise si la variable indépendante est choisie comme il convient et posant $z = \frac{1}{y}$, on trouve que l'équation (16) équivaut alors à la suivante,

$$y' + \frac{y^3}{x} + 3y^2 = 0. \tag{17}$$

Ses invariants t et T s'expriment ainsi,

$$t = \frac{(1 - 3x^2 - 18x^4)^3}{x^2(x^2 - 2)^5}, \qquad P = \frac{4(x^3 - 2)(270x^6 - 45x^4 - 24x^2 + 1)}{(1 - 3x^2 - 18x^4)^2} - 5 \tag{18}$$

et sont liés par une relation qui caractérise l'équation (17); la courbe, dont t et T sont les coordonnées cartésiennes, sera dite *attachée* à l'équation différentielle proposée; on voit qu'elle est unicursale et du degré 10.

Quand $\log \mu$ est un polynôme cubique en z, soit

$$\alpha + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3, \tag{19}$$

$\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_3$, sont définies par le système

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d\alpha_3}{dx} = 0, \qquad \frac{d\alpha_2}{dx} + 3\alpha_3 = 0, \qquad \frac{d\alpha_1}{dx} + 2\alpha_2 - 3p\alpha_3 = 0, \\ &\qquad\qquad \frac{d\alpha}{dx} + \alpha_1 - 2p\alpha_2 = 0, \end{aligned} \right. \tag{20}$$

où j'ai fait $q = -1$. On en déduit

$$p' + 6kxp^2 + 3kp^3 = 0, \tag{21}$$

la constante k étant arbitraire et l'équation (16) est ainsi donnée d'une façon explicite, si l'on sait obtenir p.

J'ai donné ailleurs le moyen d'y parvenir (C. R. de l'Ac. des Sc., 12 sept. 1887). Soit en effet, $Y' = p$: Y est déterminée par l'équation suivante

$$\frac{d^2x}{dY^2} - 6k\frac{x\,dx}{dY} - 3k = 0, \tag{22}$$

dérivée d'une équation de Riccati fort simple,

$$\frac{dx}{dY} - 3kx^2 - 3kY - 3h = 0. \tag{23}$$

Celle-ci se ramène à l'équation linéaire

$$(24)\qquad \frac{d^2u}{dY^2} + qku(kY + h) = 0,$$

dont les solutions s'expriment, comme il est bien connu, par des intégrales définies.

L'équation d'ABEL peut alors être représentée ainsi qu'il suit

$$(25)\qquad \frac{dy}{dY} - \frac{1}{\left(\frac{du}{dY}\right)} \cdot y^3 + \frac{1}{3ku^2}\left[\left(\frac{du}{dY}\right)^2 - u\frac{d^2u}{dY^2}\right]\frac{1}{\left(\frac{du}{dY}\right)} \cdot y^2 = 0,$$

avec la relation (24) pour déterminer u et la courbe qui lui est *attachée* est manifestement transcendante.

Quant à l'équation auxiliaire (21), ses invariants t et T sont des fonctions rationnelles de k^2x^3; il est facile de les calculer et la courbe attachée est unicursale et du degré 8.

Si l'on voulait poursuivre ces recherches, il faudrait d'abord imaginer que $\log \mu$ est un polynôme du 4° degré en z; on trouverait alors, pour définir p, une équation différentielle, du second ordre, non linéaire et bien plus compliquée que l'équation (16). On ne peut donc obtenir explicitement aucune des équations du type (16), auxquelles appartient un multiplicateur de la nature indiquée. Les cas suivants sont plus complexes encore, en sorte que les équations différentielles (17) et (25) doivent être regardées comme représentant toutes celles qu'il est possible d'étudier dans la série indiquée.

Les autres hypothèses, faites par ABEL au sujet du multiplicateur, lui donnent encore deux cas d'intégration; ils correspondent à ces équations,

$$(26)\qquad y' - \frac{4y^2}{3} - \frac{4y^3(x^2+1)^2}{9x^3} = 0, \qquad y' - \frac{4y^2}{3} - \frac{4y^3}{9x^3}[(x^2+1)^2 - cx^4],$$

dans lesquelles c désigne une constante arbitraire. Leurs invariants s'expriment par des fonctions rationnelles de x et le degré de la courbe attachée, toujours algébrique et unicursale, est assez élevé.

J'ajoute un cas analogue à celui de l'équation (21). Considérons l'équation différentielle

$$(27)\qquad y' + (3mx^2 + 4m^2x + m_1)y^3 + 3xy^2 = 0,$$

dans laquelle m et m_1 sont des constantes à volonté. Si l'on introduit une inconnue nouvelle, Y, en posant

$$\frac{dY}{dx} = y,$$

on change l'équation précédente en une autre, du second ordre, qui peut ainsi s'écrire

$$(28) \qquad \frac{d^2x}{dY^2} - 3x\frac{dx}{dY} - (3mx^2 + 4m^2x + m_1) = 0;$$

or elle est visiblement identique à celle-ci,

$$(29) \qquad \frac{d}{dY}\left[\frac{dx}{dY} - \frac{3x^2}{2} - 2mx\right] + 2m\left[\frac{dx}{dY} - \frac{3x^2}{2} - 2mx\right] - m_1 = 0,$$

dont l'intégration s'aperçoit d'abord: elle est donnée par la formule,

$$(30) \qquad \frac{dx}{dY} - \frac{3x^2}{2} - 2mx = \frac{m_1 + e^{-mY}}{2m};$$

la transformation

$$x = -\frac{2}{3}\frac{d\log u}{dY}, \qquad e^{-mY} = v$$

change l'équation précédente en une autre, linéaire et du second ordre,

$$(11) \qquad v^2\frac{d^2u}{dv^2} + 3v\frac{du}{dv} + \frac{3u}{2m^2}(v + m_1) = 0,$$

d'étude facile, qui définit des transcendantes spéciales.

A l'équation différentielle (27) est attachée une courbe unicursale, du degré 25.

Dans son Mémoire déjà rappelé, Mr Appell a signalé un nouveau mode d'intégration; le procédé employé par Mr Appell consistait à permuter la variable et l'inconnue dans une équation différentielle du type (1') et à la ramener ensuite à la forme (4), adoptée dans ce travail, à l'aide de la substitution (3). Quand la permutation indiquée est faite dans une équation du type (21), par exemple, l'intégration est immédiate et c'est ainsi que se trouve résolue l'équation différentielle,

$$(32) \qquad \frac{dy}{dx} - y^3 - \frac{3y^2}{x^2} = 0,$$

à laquelle est attachée une courbe unicursale du 10e degré.

Enfin, dans deux communications à l'Académie des Sciences, HALPHEN a étudié l'équation

$$(33) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3y(y+1) - 4x}{x(8y-1)}$$

et montré comment elle s'intègre, soit à l'aide des fonctions elliptiques, soit même sous forme algébrique. Les rapports de cette équation avec la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques et l'élégante discussion d'HALPHEN lui donnent un intérêt tout particulier. Ce sont ces rapports même qui fournissent les éléments nécessaires à son étude. Il est facile de lui donner la forme (4), en posant

$$(34) \qquad 4x - 3y(y+1) = \frac{1}{z};$$

ce qui implique

$$(35) \qquad \frac{dz}{dy} - 3y(y+1)(8y-1)z^3 - 2(7y+1)z^2 = 0.$$

La courbe attachée est unicursale, du degré 25.

Une importante propriété de l'équation d'HALPHEN consiste en ceci, c'est qu'elle se change en elle-même par une infinité de substitutions rationnelles.

A ce point de vue, on en peut rapprocher une équation que j'ai signalée ailleurs et qui mérite, semble-t-il, une étude plus complète; le paragraphe suivant lui est consacré.

§ 3. *Examen d'une équation particulière, admettant une transformation rationnelle en elle-même, mais aucune intégrale algébrique.*

L'équation dont je veux parler est la suivante, où n_1, n_2, sont des paramètres arbitraires,

$$(36) \qquad \frac{dy}{dx} + 2y^3(n_1^2x^3 - n_2^2x) + 3n_2y^2 = 0.$$

Si l'on introduit une inconnue nouvelle, Y, d'après l'équation $\frac{dY}{dx} = y$, elle devient celle-ci,

$$(37) \qquad \frac{d^2x}{dY^2} - 3n_2\frac{dx}{dY} - 2(n_1^2x^3 - n_2^2x) = 0,$$

du second ordre et d'une catégorie pour laquelle a été indiquée une transformation spéciale, (*Sur les invariants de certaines équations différentielles,* Journal de l'Ecole Polytechnique, 59 cahier, 1890). Soit en effet, x_1, une variable nouvelle ainsi définie,

$$(38) \qquad \frac{dx}{dY} + n_1x^2 - n_2x = 2n_1x_1^2;$$

on trouve d'abord

$$(39) \qquad \frac{dx_1}{dY} = (n_1x + n_2)x_1,$$

et, comme conséquence,

$$(40) \qquad \frac{d^2x_1}{dY^2} - 3n_2\frac{dx_1}{dY} - 2(n_1^2x_1^3 - n_2^2x_1) = 0.$$

Ayant donc pris $\frac{dx_1}{dY} = \frac{1}{y_1}$, on en conclura

$$(41) \qquad \frac{dy_1}{dx_1} + 2y_1^3(n_1^2x_1^3 - n_2^2x_1) + 3n_2y_1^2 = 0,$$

ce qui est, sauf les notations, l'équation proposée elle-même. On en déduit ce théorème:

L'équation

$$\frac{dy}{dx} + 2y^3(n_1^2x^3 - n_2^2x) + 3n_2y^2 = 0$$

se change en elle-même par la transformation,

$$(42) \qquad \frac{1}{y} + n_1x^2 - n_2x = 2n_1x_1^2, \qquad \frac{1}{x_1y_1} = n_1x + n_2,$$

qui détermine, pour x et y, des fonctions rationnelles de x_1, y_1, ...

Cette propriété engage à rechercher si l'équation (36), dont la solution n'est pas jusqu'à présent connue, admet une intégrale algébrique. C'est ce point que je vais maintenant étudier.

Il est clair d'abord qu'une telle intégrale, si elle existe, peut être regardée comme rationnelle en x et y. J'omets les preuves de cette proposition, car elles dépendent de principes qui sont bien connus.

Soit donc

$$\frac{R}{S} = \text{constante}, \tag{43}$$

cette intégrale, R et S étant des polynômes entiers en x et y. L'équation différentielle, à laquelle elle satisfait, possède une homogénéité particulière: lorsqu'on y remplace y par ky, x par $k^{-1}x$, n_1 par $n_1 k$, sans toucher à n_2, elle demeure inaltérée. Il est alors manifeste que R et S peuvent être choisis de manière à présenter la même homogénéité. J'écrirai, pour abréger,

$$2n_1^2 = -\mu$$

et, d'après ce qui précède, R et S peuvent être développés selon les puissances entières et positives de μ, de cette manière

$$R = R_0 + R_1\mu + \ldots, \qquad S = S_0 + S_1\mu + \ldots; \tag{44}$$

$R_0, \ldots, S_1, \ldots$ sont encore des polynômes entiers en x et y. Pour déterminer les premiers termes de ces développements, je remplace μ par zéro dans l'équation (36), qui devient ainsi la suivante

$$\frac{dy}{dx} - 2n_2^2 xy^3 + 3n_2 y^2 = 0. \tag{45}$$

Celle-ci s'intègre sans peine; il suffit de poser

$$n_2 xy = z \tag{46}$$

et l'on trouve ainsi

$$\frac{x(2z-1)^2}{z(z-1)} = \text{constante } C. \tag{47}$$

Par suite $\frac{R_0}{S_0}$ dépend uniquement de l'expression

$$\frac{x(2z-1)^2}{z(z-1)},$$

homogène et de degré égal à 1; ce doit en être une simple puissance,

puisque $\frac{R_0}{S_0}$ doit être, nous l'avons vu, rationnelle en x et z et homogène. Ainsi

$$(48)\qquad \frac{R_0}{S_0} = \frac{x^N(2z-1)^{2N}}{z^N(z-1)^N},$$

N étant un nombre entier, qu'on peut toujours supposer positif. Mais R_0, S_0, sont des polynômes entiers en x et y, de sorte que

$$(49)\qquad R_0 = x^N(2z-1)^{2N}, \qquad S_0 = z^N(z-1).$$

Comme $R = 0$ doit donner une solution particulière de l'équation (36),

$$(36')\qquad \frac{dy}{dx} - y^3(\mu x^2 + 2n_2^2 x) + 3n_2 y^2 = 0,$$

une identité semblable à celle-ci,

$$(50)\qquad \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}[y^3(\mu x^2 + 2n_2^2 x) - 3n_2 y^2] = \lambda R,$$

est vérifiée, λ et R représentant des polynômes entiers en μ. Le premier membre de cette équation est, à l'égard de μ, de degré plus élevé que le second, d'une unité et l'on en conclut que le développement

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\mu + \dots$$

se réduit à ses deux premiers termes, c'est à dire à $\lambda_0 + \lambda_1\mu$; de plus, R est homogène et du degré N; les deux membres de l'équation (50) sont aussi homogènes et du degré $N + 1$; il en résulte que λ lui-même est homogène et du premier degré. Comme d'ailleurs

$$(51)\qquad \frac{\partial R_0}{\partial x} + \frac{\partial R_0}{\partial x}[2n_2^2 xy^3 - 3n_2 y^2] = \lambda_0 R_0, \quad \text{avec} \quad R_0 = x^N(2z-1)^{2N},$$

on en déduit

$$(52)\qquad \lambda_0 = \frac{N(2z-1)^2}{x}.$$

Un calcul semblable, fait au moyen de S_0, ne fait que confirmer cette expression.

Quant à l'équation différentielle proposée, en y introduisant z à la place de y, elle devient

$$(53)\qquad \frac{xdz}{dx} - z^3\left[2 + \frac{\mu x^2}{n_2^2}\right] + 3z^2 - z = 0.$$

D'après cela, voici l'équation satisfaite par un terme S_n quelconque, du développement de S,

$$(54)\qquad \frac{\partial S_n}{\partial x} + \frac{z(z-1)(2z-1)}{x}\frac{\partial S_n}{\partial z} + \frac{z^3 x}{n_2^2}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial z} = \lambda_0 S_n + \lambda_1 S_{n-1}\cdot\,.$$

De plus, à cause de l'homogénéité,

$$(55)\qquad S_n = x^{2n}.\sigma_n, \qquad \lambda_1 = \Lambda_1 x$$

et Λ_1, σ_n ne dépendent plus que de z. Ainsi donc

$$(56)\quad z(z-1)(2z-1)\frac{\partial\sigma_n}{\partial z} - [N(2z-1)^2 - 2n]\sigma_n - \Lambda_1\sigma_{n-1} + \frac{z^3}{n_2^2}\frac{\partial\sigma_{n-1}}{\partial z} = 0.$$

Si S_{n-1} est le dernier terme de S, σ_n est nulle et il reste

$$(57)\qquad \frac{\partial\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1}\partial z} - \frac{n_2^2\Lambda_1}{z^3} = 0.$$

Or σ_{n-1} est une fonction entière de z et, comme $\frac{z^2\partial\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1}\partial z}$, d'après l'égalité précédente, est encore un polynôme, il ne peut y avoir, dans σ_{n-1}, aucun autre facteur que z lui-même. Soit donc $\sigma_{n-1} = \alpha_{n-1}z^{n'}$, α_{n-1} étant une certaine constante et n', un nombre entier positif; nous en devrons conclure

$$(58)\qquad \Lambda_1 = \frac{n'z^2}{n_2^2}.$$

Voici maintenant l'équation différentielle satisfaite par R_1,

$$(59)\qquad \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{z(z-1)(2z-1)}{x}\frac{\partial R_1}{dz} + \frac{xz^3}{n_2^2}\frac{\partial R_0}{\partial z} = \lambda_0 R_1 + \lambda_1 R_0.$$

Le degré d'homogénéité de R_1 étant $-(N+2)$, je puis le représenter ainsi,

$$(60)\qquad R_1 = \rho_1 x^{N+2},$$

ρ_1 ne dépendant que de z. Cette dernière fonction satisfait à l'équation suivante

$$(61)\qquad z(z-1)(2z-1)\frac{\partial\rho_1}{\partial z}-\rho_1[N(2z-1)^2-(N+2)]$$
$$=A_1(2z-1)^{2N}-\frac{4Nz^3}{n_2^2}(2z-1)^{2N-1},$$

dont tous les termes sont divisibles par $2z-1$, excepté le produit $(N+2)\rho_1$, au premier membre.

Il faut donc admettre que ρ_1 est divisible par une certaine puissance de $2z-1$; soit

$$\rho_1=\rho_{1.1}(2z-1)^{\alpha_1},$$

α_1 désignant un nombre entier positif. L'équation (61) devient ainsi

$$(62)\quad z(z-1)(2z-1)^{\alpha_1+1}\frac{\partial\rho_{1.1}}{\partial z}+(2z-1)^{\alpha_1}\rho_{1.1}[2\alpha_1 z(z-1)-N(2z-1)^2+N+2]$$
$$=(2z-1)^{2N-1}\left[(2z-1)A_1-\frac{4Nz^3}{n_2^2}\right].$$

Cela étant, si α_1 était supérieur à $2N-1$, tout serait, dans l'identité divisible par $(2z-1)^{2N-1}$ et, la division faite, $2z-1$ resterait en facteur dans tous les termes du premier membre; il n'en pourrait être ainsi pour le second. Si α_1 était inférieur à $2N-1$, après division des deux membres par $(2z-1)^{\alpha_1}$, il faudrait conclure que

$$\rho_{1.1}[2\alpha_1 z(z-1)-N(2z-1)^2+N+2]$$

est encore divisible par $2z-1$, ce qui est impossible, puisque $2z-1$ ne divise plus $\rho_{1.1}$ et, pour $\alpha_1<2N-1$, ne peut non plus diviser le trinôme entre parenthèses. La conséquence est

$$\alpha_1=2N-1,$$

ce qui change l'équation (62) en celle-ci,

$$(63)\quad z(z-1)(2z-1)\frac{\partial\rho_{1.1}}{\partial z}-2\rho_{1.1}(z^2-z-1)=(2z-1)A_1-\frac{4Nz^3}{n_2^2}.$$

On en déduit

$$(64)\qquad \rho_{1.1}=\frac{H(2z-1)^5}{z^2(z-1)^2},$$

avec

$$(65)\qquad H = \int \frac{z(z-1)A_1 dz}{(2z-1)^5} - \frac{4N}{n_2^2}\int \frac{z^4(z-1)dz}{(2z-1)^6}.$$

Soit, pour un instant

$$z = z' + \frac{1}{2},$$

de sorte que

$$(66)\qquad H = \int \frac{z'^2 - \frac{1}{4}}{2^5 z'^5} A_1 dz' - \frac{N}{n_2^2}\int \frac{\left(z'^2 - \frac{1}{4}\right)\left(z'^2 + \frac{1}{2}\right)^2}{2^4 . z'^6} dz'.$$

La première des deux intégrales qui entrent dans cette formule s'exprime encore ainsi, A_1', A_1'', ... désignant les dérivées successives de A_1,

$$\frac{1}{2^5}\left[\frac{A_1'}{48 z'^3} + \frac{A_1}{16 z'^4} + \int\left(A_1 - \frac{A_1''}{48}\right)\frac{dz'}{z'^3}\right].$$

Or

$$(67)\quad \int\left(A_1 - \frac{A_1''}{48}\right)\frac{dz'}{z'^3} = \left(\frac{A_1''}{48} - A_1\right)\frac{1}{2z'^2} + \left(A_1' - \frac{A_1'''}{48}\right)\frac{1}{2z'} + \frac{1}{2}\int\left(A_1'' - \frac{A_1^{\text{iv}}}{48}\right)\frac{dz'}{z'}.$$

Le logarithme, s'il y en avait un dans H, proviendrait du dernier terme de l'équation précédent, où il aurait pour coefficient

$$(68)\qquad \frac{1}{2^6}\left(A_1'' - \frac{A_1^{\text{iv}}}{48}\right)_{(z'=0)}$$

et de la seconde intégrale que contient H, où il entrerait multiplié par $\frac{N}{16 n_2^2}$. Aucun logarithme ne pouvant subsister, tous calculs faits, dans H, il faut que

$$(69)\qquad \left(A_1'' - \frac{A_1^{\text{iv}}}{48}\right)_{(z'=0)} = \frac{4N}{n_2^2}.$$

Mais, A_1 étant donné par la formule (58), $A_1^{\text{iv}} = 0$, $A_1'' = \frac{2n'}{n_2^2}$, en sorte que $n' = 2N$, c'est à dire

$$(70)\qquad A_1 = \frac{2Nz^2}{n_2^2}.$$

Ceci permet de simplifier l'équation (65), qui devient

$$(71)\qquad H = -\frac{2N}{n_2^2}\int\frac{z^2(z-1)\,dz}{(2z-1)^6} = -\frac{N}{2^5 n_2^2}\int\frac{\left(z'^2-\frac{1}{4}\right)\left(z'+\frac{1}{2}\right)^2 dz'}{z'^6}.$$

L'intégration en est immédiate et introduit une constante arbitraire; l'expression de H, qui en résulte, multipliée par

$$2^5 \cdot \frac{z'^5}{\left(z'^2-\frac{1}{4}\right)^2},$$

doit donner le polynôme entier, $\rho_{1.1}$. Or on reconnait sans peine que le produit de z'^5 par l'intégrale

$$\int\frac{\left(z'^2-\frac{1}{4}\right)\left(z'+\frac{1}{2}\right)^2 dz'}{z'^6}$$

est un polynôme que ne divise pas $z'^2-\frac{1}{4}$, ce qui implique contradiction.

L'équation différentielle proposée n'admet donc aucune intégrale algébrique. La courbe qui lui est attachée est une des moins compliquées qui se soient rencontrées jusqu'ici.

Lorsqu'on y prend T et $\tau = \frac{1}{t}$ pour les coordonnées cartésiennes, c'est une cubique unicursale, définie, si l'on veut, par les équations

$$(72)\qquad \tau = -\frac{9n_2^2}{7^3}\cdot\frac{u^2}{(u+n_2^2)^3},\qquad T = \frac{31u^2+8n_2^2u-8n_2^4}{7(u+n_2^2)^2},$$

ou par celle qui en résulte, après l'élimination de u. Cette dernière est facile à construire d'après les propriétés mises en évidence par les relations (72).

L'équation $\frac{dy}{dx}+2y^3(n_1^2x^2-n_2^2x)+3n_2y^2=0$ offre cet intérêt, c'est qu'on en connait une propriété simple, celle de n'être point altérée par les substitutions rationnelles (42); cependant son intégrale ne peut être algébrique, en sorte qu'elle définit une transcendante, vraisemblablement nouvelle.

Ses seuls points critiques correspondent aux valeurs infinies de x et aux valeurs, x_0, de cette même variable, qui rendent l'une des solutions, y, infinie. Auprès des dernières, deux solutions présentent cette singularité; leurs produits par $(x-x_0)^{\frac{1}{2}}$ sont des séries, d'abord convergentes, développées selon les puissances entières et positives de $x-x_0$.

Les formules (42), où l'on regarde x_1 et y_1 comme les variables primitives, montrent que tous les points critiques à distance finie correspondent, soit à $x_1 = 0$, soit à $x = -\frac{n_2}{n_1}$. Leur distribution dans le plan, pour chaque solution particulière, est ainsi rattachée par des formules commodes aux valeurs que reçoit, en un point ordinaire, une autre solution, liée à la première d'une façon connue.

On peut rapprocher du cas précédent celui d'une équation du second ordre, qui se change aussi en elle-même par des substitutions qu'on sait calculer.

Voici d'une façon précise, la proposition dont il s'agit, que je me borne à énoncer.

»L'équation différentielle

$$y'' - ay^3 - \frac{y}{6}\left(\frac{a''}{a} - \frac{7a'^2}{a^2}\right) = 0,$$

quelle que soit la fonction de x désignée par a, se reproduit, si l'on remplace y par une nouvelle inconnue

$$y_1,$$

ainsi définie,

$$y' + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}y^2 + \frac{a'y}{6a} = y_1^2 a^{\frac{1}{2}}.»$$

Il est manifeste que la méthode employée dans ce paragraphe est susceptible de s'appliquer, sans modifications essentielles, à des exemples très variés.

Je l'ai employée notamment pour étudier ce qui correspond à l'une des relations les plus simples qu'on puisse établir entre T et τ, (exception faite de $T = 0$, déjà traitée), je veux dire le cas défini par l'égalité

(73) $$T = a\tau$$

a désignant une constante. L'équation différentielle est alors celle-ci

$$(74) \qquad \frac{dy}{dx} - \frac{1}{a}\left[\frac{y^3}{x^3} + \frac{1-ax}{3x}y + \frac{1}{x}\right] = 0.$$

En y substituant $\frac{y}{\mu}$ et $\frac{x}{\mu}$, au lieu de x et y, on voit d'abord qu'elle peut s'écrire

$$(75) \qquad 9ax^3\frac{dy}{dx} - [3y^3 + (\mu - 3ax)xy + 3\mu^2 x] = 0;$$

le paramètre μ joue ici le même rôle que dans l'équation (36') et permet une analyse toute semblable. Malgré la simplicité apparente de la relation (73), j'ai pu me convaincre ainsi qu'il n'existe pour l'équation (74) aucune intégrale algébrique. J'omets, pour abréger, les preuves de cette proposition.

Quant à la recherche des transformations telles que (42), elle est analogue à celle des intégrales algébriques, mais constitue en général un problème plus compliqué, que je ne veux point aborder dans ce travail.

---

§ 4. *Nouvelles intégrations. — Liens qui existent, entre les équations différentielles proposées et certains systèmes linéaires.*

L'un des cas remarqués d'abord dans l'étude de l'équation différentielle

$$(76) \qquad \frac{dy}{dx} + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 = 0,$$

est, on l'a vu, celui qui correspond à l'hypothèse $t =$ constante, ou bien, ce qui est la même chose, $T = 0$. L'intégration résulte alors des relations que présente l'équation proposée avec un système d'équations linéaires qui lui est associé, (§ 1, in fine).

Les cas, auxquels est consacré ce paragraphe, doivent être rapprochés de celui-là, mais leur complication est beaucoup plus grande. Voici comment on y parvient:

Soit z une fonction de deux variables, x et y et, d'une façon générale

$$z^{(i.k)} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k},$$

l'une quelconque de ses dérivées partielles. Je considère trois équations linéaires, aux dérivées partielles du troisième ordre,

$$(77)\quad \begin{cases} z^{(1.2)} + p_{3.0}z^{(0.3)} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} p_{k.i}z^{(i.k)} = 0, \\ z^{(2.1)} + p'_{3.0}z^{(0.3)} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} p'_{k.i}z^{(i.k)} = 0, \\ z^{(3.0)} + p''_{3.0}z^{(0.3)} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} p''_{k.i}z^{(i.k)} = 0, \end{cases}$$

ayant 7 solutions communes distinctes, tous les coefficients $p_{k.i}, \ldots, p'_{k.i}, \ldots, p''_{3.0}, \ldots$, dépendant uniquement de la variable x. Si j'établis entre cette variable et y une relation quelconque, z, $z^{(1.0)}$, $z^{(0.1)}$, ..., deviennent des fonctions de x, entre lesquelles sont établies en particulier les équations suivantes,

$$(78)\quad \begin{cases} dz^{(1.0)} - z^{(2.0)}dx - z^{(1.1)}dy = 0, \qquad dz^{(0.1)} - z^{(1.1)}dx - z^{(0.2)}dy = 0, \\ d^2z^{(1.0)} - z^{(2.0)}d^2x - z^{(1.1)}d^2y + S_{3.0}z^{(0.3)} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} S_{k.i}z^{(i.k)} = 0, \\ d^2z^{(0.1)} - z^{(1.1)}d^2x - z^{(0.2)}d^2y + R_{3.0}z^{(0.3)} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} R_{k.i}z^{(i.k)} = 0, \end{cases}$$

après qu'on a posé, pour abréger,

$$(79)\quad \begin{cases} R_{3.0} = -dy^2 + 2p_{3.0}dxdy + p'_{3.0}dx^2, \qquad R_{k.i} = 2p_{k.i}dxdy + p'_{k.i}dx^2, \\ S_{3.0} = p_{3.0}dy^2 + 2p'_{3.0}dxdy + p''_{3.0}dx^2, \\ S_{k.i} = p_{k.i}dy^2 + 2p'_{k.i}dxdy + p''_{k.i}dx^2; \end{cases}$$

tant que la liaison entre x et y reste arbitraire, il n'existe, entre z, $z^{(1.0)}$, $z^{(0.1)}$ et leurs différentielles des deux premiers ordres, aucune relation qui ne contienne aussi $z^{(0.3)}$; mais le contraire est vrai pour un choix convenable de la liaison supposée entre x et y; α_1, α_2, β_1, β_2, représentant des multiplicateurs, déterminés de cette manière,

$$(80)\quad \begin{cases} \alpha_1(S_{0.2} - d^2x) + \alpha_2 R_{0.2} - \beta_1 dx = 0, \\ \alpha_1(S_{1.1} - d^2y) + \alpha_2(R_{1.1} - d^2x) - \beta_1 dy - \beta_2 dx = 0, \\ \alpha_1 S_{2.0} + \alpha_2(R_{2.0} - d^2y) - \beta_2 dy = 0, \qquad \alpha_1 S_{3.0} + \alpha_2 R_{3.0} = 0, \end{cases}$$

il est satisfait à cette équation,

$$(81)\qquad \alpha_1 d^2 z^{(1.0)} + \alpha_2 d^2 z^{(0.1)} + \beta dz^{(1.0)} + \beta_2 dz^{(0.1)} + \sum_{(i+k\leqq 1)} (\alpha_2 R_{k.i} + \alpha_1 S_{k.i}) z^{(i.k)} = 0,$$

qui est bien de l'espèce demandée. Comme d'ailleurs les équations (80) sont homogènes et linéaires, il en résulte

$$(82)\qquad \begin{aligned} &(R_{3.0}dy + S_{3.0}dx)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) + (R_{3.0}S_{0.2} - R_{0.2}S_{3.0})dy^2 \\ &+ (R_{3.0}S_{1.1} - R_{1.1}S_{3.0})dx\,dy + (R_{3.0}S_{2.0} - R_{2.0}S_{3.0})dx^2 = 0, \end{aligned}$$

ce qui est, pour y, une équation différentielle, du second ordre. On voit, d'après (79), qu'elle exprime $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ par une fraction rationnelle, dont le numérateur est un polynôme, du 6° degré, homogène, en dx, dy et le dénominateur, un polynôme du 3° degré.

L'équation (82) se réduit évidemment au premier ordre, si l'on écrit $\frac{dy}{dx} = \mathrm{v}$. Cette substitution faite, s'il arrive que le dénominateur divise exactement le numérateur, tous deux étant regardés comme des fonctions entières de v, cette inconnue se trouve définie par une équation du type (76). Nous allons voir comment sa signification même en fait connaître un mode d'intégration.

Et, d'abord, le système (77) s'intègre sans peine. Soient $P_{k.i}$, $P'_{k.i}$, ..., des quantités définies par les relations

$$(83)\qquad \begin{cases} P'_{k.i} + p_{3.0}P_{k.i} + p_{k-1.i} - p_{0.2}p'_{k.i} - p'_{1.1}p_{k.i} = 0, \\ p_{3.0}P'_{k.i} - p'_{3.0}P_{k.i} + \dfrac{\partial p_{k.i}}{\partial x} + p_{k.i-1} - p'_{k-1.i} - p_{0.2}p''_{k.i} \\ \qquad + (p'_{0.2} - p_{1.1})p'_{k.i} + (p'_{1.1} - p_{2.0})p_{k.i} = 0; \end{cases}$$

les trois équations aux dérivées partielles dont il s'agit, ayant 7 solutions communes, équivalent au système suivant d'équations différentielles totales linéaires,

$$\left|\begin{aligned} &dz^{(0.3)} + \Big[P'_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k\leqq 2)} P'_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dx + \Big[P_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k\leqq 2)} P_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dy = 0, \\ &dz^{(2.0)} + \Big[p''_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k\leqq 2)} p''_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dx + \Big[p'_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k\leqq 2)} p'_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dy = 0, \\ &dz^{(1.1)} + \Big[p'_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k\leqq 2)} p'_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dx + \Big[p_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k\leqq 2)} p_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dy = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(84)\quad \begin{cases} dz^{(0.2)} + \Big[z^{(0.3)}p_{3.0} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} p_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dx - z^{(0.3)}dy = 0, \\ dz^{(1.0)} - z^{(2.0)}dx - z^{(1.1)}dy = 0, \\ dz^{(0.1)} - z^{(1.1)}dx - z^{(0.2)}dy = 0, \\ dz - z^{(1.0)}dx - z^{(0.1)}dy = 0. \end{cases}$$

Imaginons que ces équations soient ajoutées, après multiplication par des facteurs, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7$, où n'entre pas y. Ceux-ci peuvent être choisis de manière à vérifier l'identité,

$$(85)\quad \frac{\partial \log}{\partial y}[\lambda_1 z^{(0.3)} + \lambda_2 z^{(2.0)} + \lambda_3 z^{(1.1)} + \lambda_4 z^{(0.2)} + \lambda_5 z^{(1.0)} + \lambda_6 z^{(0.1)} + \lambda_7 z] + m = 0,$$

dans laquelle m est une constante. Il s'ensuit, à cause de (84), les identités,

$$(86)\quad \begin{cases} \lambda_1(P_{3.0} + m) + \lambda_2 p'_{3.0} + \lambda_3 p_{3.0} - \lambda_4 = 0, \ \ldots, \\ \lambda_1 P_{1.0} + \lambda_2 p'_{1.0} + \lambda_3 p_{1.0} + m\lambda_6 - \lambda_7 = 0, \\ \lambda_1 P_0 + \lambda_2 p'_0 + \lambda_3 p_0 + m\lambda_7 = 0, \end{cases}$$

qui font connaître, non pas les quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_7$, mais leurs rapports à l'une d'elles. Celle-ci même est déterminée, si l'on veut que la condition

$$(87)\quad \frac{\partial}{\partial x}[\lambda_1 z^{(0.3)} + \lambda_2 z^{(2.0)} + \lambda_3 z^{(1.1)} + \lambda_4 z^{(0.2)} + \lambda_5 z^{(1.0)} + \lambda_6 z^{(0.1)} + \lambda_7 z] = 0,$$

soit remplie; de cette dernière il résulte en effet

$$(88)\quad \frac{d\lambda_1}{dx} = \lambda_1 P'_{3.0} + \lambda_2 p''_{3.0} + \lambda_3 p'_{3.0} + \lambda_4 p_{3.0}, \ \ldots, \ \frac{d\lambda_7}{dx} = \lambda_1 P'_0 + \lambda_2 p''_0 + \lambda_3 p'_0 + \lambda_4 p_0,$$

Or le système proposé, (77), ayant sept solutions distinctes, il est clair qu'il peut être satisfait à la fois aux équations (85) et (87), en sorte que les relations, entre $P_{k.i}, \ldots, p''_{k.i}$, et leurs dérivées, déduites de cet ensemble, sont précisément celles qui assurent l'intégrabilité de ce système.

Soient

$$m^4 + m^3 P_{3.0} + m^2 P_{2.0} + m P_{1.0} + P_0 = M'',$$

$$m^3 p'_{3.0} + m^2 p'_{2.0} + m p'_{1.0} + p'_0 = M',$$

$$m^3 p_{3.0} + m^2 p_{2.0} + m p_{1.0} + p_0 = M;$$

les équations (86) ont pour conséquence celle-ci,

$$(89)\qquad \begin{vmatrix} M'' & , & M' & , & M \\ P_{0.2} & , & p'_{0.2}+m & , & p_{0.2} \\ mP_{1.1}+P_{0.1} & , & mp'_{1.1}+p'_{0.1} & , & m^2+mp_{1.1}+p_{0.1} \end{vmatrix} = 0,$$

qui est algebrique en m et du septième degré. Le coefficient de la puissance la plus élevée de m est l'unité; tous les autres doivent être aussi des constantes, d'ailleurs arbitraires, ce qui donne sept équations; sept autres s'obtiennent d'une façon semblable, en substituant, dans les relations (86), différentiées, les expressions (88) de $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial \lambda_7}{\partial x}$. Les nouvelles constantes qui s'introduisent ont les mêmes valeurs que les précédentes et l'on a par ce moyen toutes les conditions d'intégrabilité du système (77), sous une forme qui présente des avantages particuliers.

La conclusion de cette analyse est que l'inconnue z s'exprime par une formule de cette espèce,

$$(90)\qquad z = \sum_{(1 \leqq i \leqq 7)} c_i \zeta_i(x) e^{m_i y},$$

$m_1, m_2, \ldots$ étant les racines de l'équation (89), les ζ_i des fonctions qu'on sait construire, et les c_i des constantes arbitraires; $z^{(1.0)}, \ldots, z^{(0.3)}$, sont données par des formules analogues, qui s'en déduisent. Je suppose maintenant que les équations (77) ne soient pas données, mais seulement l'équation différentielle (82), qui leur est associée. Celle-ci ne changerait pas, si z était multipliée par une fonction donnée quelconque, c'est un point que met en lumière sa définition même. Je puis donc faire que le déterminant, δ, des solutions du système (84) soit une constante et, comme

$$(91)\qquad d\log\delta + (P'_{3.0}+p_{2.0}+p'_{1.1}+p''_{0.2})dx + (P_{3.0}+p_{1.1}+p'_{0.2})dy = 0,$$

c'est établir les deux équations

$$(92)\qquad P'_{3.0}+p_{2.0}+p'_{1.1}+p''_{0.2} = 0, \qquad P_{3.0}+p_{1.1}+p'_{0.2} = 0;$$

elles remplacent, avec l'hypothèse d'après laquelle $d\delta$ s'évanouit, l'une des sept premiers conditions d'int'grabilité. Mais cells-ci, jointes aux deux relations précédentes, permettent de calculer $P_{3.0}, P'_{3.0}, P''_{3.0}$ et $p_{k.i}, p'_{k.i}, p''_{k.i}$, pour $i+k$ inférieur ou égal à z, étant donnés les coefficients qui figurent

dans l'équation (82), si par exemple p_0, p_0', p_0'', sont déjà nuls, ce que je vais supposer.

Il est ainsi associé, à l'équation (82), un système linéaire (77), dont la détermination est complète. Il reste à vérifier les dernières conditions d'intégrabilité, dont le nombre est réduit à six par les hypothèses faites sur p_0, p_0', p_0''.

Cela fait, je dis que l'équation (82) peut être intégrée sans peine. Elle implique en effet la relation (81), dans laquelle $z^{(1.0)}$, $z^{(0.1)}$ et z sont maintenant connues et représentées par des formules analogues à (90). Celle-ci constitue donc, entre x, y et ses deux premières dérivées, une équation contenant, d'une façon linéaire et homogène, sept constantes arbitraires. Elle comprend toutes les solutions de l'équation différentielle proposée et l'on peut d'abord, à l'aide de cette dernière, en éliminer $\frac{d^2y}{dx^2}$; elle reste ainsi rationnelle à l'égard de $\frac{dy}{dx}$; mais l'équation dont l'agissait est celle, du premier ordre, qui se déduit de (82) par la substitution $\frac{dy}{dx} = \mathrm{v}$. L'intégrale de celle-ci résulte des considérations précédentes. Il suffit en effet de différentier cinq fois l'équation (81) et d'en faire disparaitre les dérivées de y, d'ordre supérieur à l'unité, à l'aide de l'équation différentielle elle-même, (82). On a ainsi construit un système de six équations linéaires et homogènes entre les sept quantités $c_i e^{m_i y}$; leurs coefficients sont des fonctions de x et de v, rationnelles pour cette dernière variable et, comme l'expression

$$\left[c_i c_k^{-1} e^{(m_i - m_k)y}\right]^{m_{i'} - m_k} \left[c_{i'} c_k^{-1} e^{(m_{i'} - m_k)y}\right]^{m_k - m_i}$$

est une simple constante, il suffit d'y remplacer les facteurs $c_i e^{m_i y}$, dont les rapports seuls y figurent, par les valeurs proportionnelles, qui fait connaitre le système indiqué, pour obtenir l'intégrale cherchée. Le cas où l'une des racines m est égale à zéro ne fait pas exception et n'exige même en général aucune modification essentielle des calculs précédents.

Si les différences de trois racines m_i sont des nombres rationnels, l'intégrale obtenue est algébrique à l'égard de l'inconnue v, mais son degré est d'ordinaire fort élevé.

J'ajoute qu'il est facile de former effectivement des équations différentielles de l'espèce qui vient d'être étudiée, car il est visiblement possible

de former des systèmes, tels que (77), ayant 7 solutions communes distinces et nous avons montré comment s'en déduit l'équation (82).

Quant à celles du type proposé,

$$(93) \qquad \frac{dv}{dx} + a_1 v^3 + 3a_2 v^2 + 3a_3 v + a_4 = 0,$$

nous les avons vues apparaître quand l'expression $R_{3.0} dy + S_{3.0} dx$ divise exactement celle-ci,

$$(94) \quad (R_{3.0} S_{0.2} - R_{0.2} S_{3.0}) dy^2 + (R_{3.0} S_{1.1} - R_{1.1} S_{3.0}) dx dy + (R_{3.0} S_{2.0} - R_{2.0} S_{3.0}) dx^2;$$

Mais il reste à voir comment, l'équation (93) étant donnée, on y peut rattacher une équation (82), remplissant s'il est possible les conditions déjà mentionnées.

$a_1, a_2, \ldots, a_4$ étant des fonctions connues de x, tous les coefficients $p_{k.i}, p'_{k.i}, p''_{k.i}$, dans lesquels $i + k$ est égal à 2, sont exprimés, par suite de la divisibilité supposée, au moyen de $p_{3.0}, p'_{3.0}, p''_{3.0}$. Ces derniers coefficients, en même temps, qu'une relation invariante entre $a_1, a_2, \ldots, a_4$, résultent des conditions d'intégrabilité auxquelles le système (77) est assujetti et l'équation (82) est ainsi déterminée d'une façon complète. On peut donc toujours vérifier si une équation différentielle donnée, du type (93), correspond à un système (77) intégrable et construire, lorsqu'il en est ainsi, l'expression

$$(95) \qquad R_{3.0} dy + S_{3.0} dx,$$

sorte de multiplicateur qui permet de lui donner la forme (82) et, comme conséquence, de l'intégrer.

Des considérations semblables s'appliquent, sans difficultés nouvelles, à toute une série de cas, dont le précédent est le plus simple; mais les calculs qu'ils exigent sont trop longs pour présenter une utilité véritable; leur existence est, pour la théorie des équations différentielles du type (4), le seul point qu'il importe de connaître.

St Mandé, le 30 décembre 1901.

SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE D'UNE SÉRIE DE TAYLOR

PAR

HELGE VON KOCH

À STOCKHOLM.

La question de trouver une expression générale pour le prolongement analytique d'une série de TAYLOR en dehors de son cercle de convergence, abordée en 1896 par M. BOREL à l'aide de sa méthode de sommation exponentielle, a fait dans les dernières années des progrès considérables[1], grâce surtout aux recherches de M. MITTAG-LEFFLER[2].

Le théorème fondamental démontré par M. MITTAG-LEFFLER, qui est le résultat le plus complet obtenu jusqu' à présent sur ce sujet, peut s'énoncer de la manière suivante.

Soit

$$\mathfrak{P}(z\,|\,a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

une série de TAYLOR convergente dans le voisinage de $z = a$; on peut former avec les coefficients c — et cela de plusieurs manières différentes — une série de polynômes $S(z)$ qui à l'intérieur de l'étoile principale A appartenant aux coefficients c[3] converge et représente la branche uniforme

[1] On trouve un exposé des principaux travaux se rapportant à ce sujet dans les livres suivants:

BOREL, *Leçons sur les séries divergentes;* Paris, Gauthier-Villars, 1901;

HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique;* Paris, C. Naud, 1901.

[2] *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène:* Acta Mathem.; t. 23, p. 43; t. 24, p. 183 et 205.

[3] Pour la définition de *l'étoile*, voir le mém. cité de M. MITTAG-LEFFLER (voir notamment Acta Math. t. 23, p. 47 ou t. 24, p. 183 et t. 24, p. 200).

Un point z est, par définition, situé à *l'intérieur* de A si le prolongement analytique de $\mathfrak{P}(z\,|\,a)$ obtenu en suivant le chemin rectiligne entre les points a et z est *holomorphe* tout le long de ce chemin.

$f(z)$ de fonction analytique définie par l'élément $\mathfrak{P}(z|a)$ et par son prolongement analytique à l'intérieur de A.

L'étoile principale étant un continuum *limité* (sauf dans le cas particulier où la série $\mathfrak{P}(z|a)$ converge pour toute valeur de l'argument) et les expressions $S(z)$ de M. Mittag-Leffler cessant, en général, de converger ou de représenter $f(z)$ sur la limite de A, on doit se proposer, pour les points appartenant à cette limite, une question analogue à celle qu'a proposé Abel (Journal de Crelle, t. 2; Oeuvres complètes, Edition Sylow-Lie, t. 1, p. 618), concernant la valeur que prend $f(z)$ en un point appartenant au cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}(z|a)$.

La question que nous avons en vue peut se formuler de la manière suivante:

Quelle valeur prend la branche $f(z)$ en un point appartenant à la limite de l'étoile principale?

L'objet du présent travail est de résoudre cette question pour une partie L de cette limite qui sera définie au § 3.

Le résultat final auquel nous arrivons au § 3 peut s'énoncer ainsi:

On peut former avec les coefficients c une expression qui converge et représente $f(z)$ non seulement à l'intérieur de l'étoile principale, mais aussi en tout point de L où $f(x)$ est holomorphe.

Pour éclaircir dès maintenant cet énoncé par un exemple, considérons le cas où $f(z)$ est méromorphe dans tout le plan; dans ce cas L n'est autre que la limite complète de A, et notre expression fournit la valeur de $f(z)$ *dans toute l'étendue du plan* (les pôles étant seuls exclus).

Dans le dernier paragraphe, nous montrons comment les expressions obtenues s'appliquent à la recherche des points singuliers situés dans le domaine considéré.

§ 1. *Démonstration d'une formule fondamentale.*

1. La méthode que nous allons employer repose sur la propriété suivante de la fonction exponentielle: si x et s sont des nombres réels et positifs on a

$$(1) \qquad \lim_{s=\infty} x^s e^{-x^s} = \begin{cases} 0 \\ e^{-1} \end{cases}$$

selon que x est *différent* de *un* ou *égal* à *un;* plus généralement, si σ et τ désignent des polynômes en s prenant des valeurs positives dès que s est suffisamment grand, la fonction

$$E(x, s) = x^{\sigma} e^{-x^{\tau}}$$

jouit de la propriété

$$\lim_{s=\infty} E(x, s) = \begin{cases} 0 \\ e^{-1} \end{cases} \tag{2}$$

selon que

$$x \begin{matrix} \neq 1 \\ = 1 \end{matrix}$$

et pour les dérivées de cette fonction par rapport à x on a aussi

$$\lim_{s=\infty} \frac{d^k}{dx^k} E(x, s) = 0 \qquad (k=1,2,3,\ldots) \tag{3}$$

pourvu que

$$x \neq 1;$$

quant aux valeurs que prennent ces dérivées pour $x = 1$ nous n'en aurons besoin que dans un cas particulier qui sera étudié plus tard.

A côté de ces propriétés, nous aurons besoin de la remarque suivante: si s est réel et positif et que z désigne une variable complexe, on a

$$\lim_{s=\infty} z^s e^{-z^s} = 0$$

et plus généralement

$$\lim_{s=\infty} E(z, s) = 0$$

tant que

$$|z| < 1 .$$

Dans tout ce qui va suivre, la lettre s désignera un nombre *entier* et *positif.* Si u est une fonction de s, le symbole

$$\lim_{s=\infty} u$$

désignera toujours la limite vers laquelle tend u quand s augmente indéfiniment en parcourant la suite des nombres entiers et positifs. Enfin,

σ et τ désigneront deux polynômes donnés en s assujettis à la seule condition d'être égaux à des nombres positifs entiers quand s est positif et entier.

2. Considérons une série de TAYLOR

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \tag{4}$$

convergente dans le voisinage de l'origine; il existe toujours un nombre positif R tel que la fonction $f(z)$ définie dans le cercle $|z| = R$ par prolongement analytique de la série proposée, jouisse des deux propriétés suivantes:

1° $f(z)$ est *méromorphe* à l'intérieur du domaine

$$|z| < R; \tag{5}$$

2° tous les points singuliers de $f(z)$ dans ce domaine sont situés sur la partie positive de l'axe réel.

Dans certains cas, la valeur maximum qu'on peut donner à R coïncide avec la valeur du rayon de convergence de la série donnée; c'est ainsi, par exemple, de la fonction $\log(1 - z)$ qui cesse d'être uniforme dans le voisinage de $z = 1$. Dans d'autres cas, au contraire, R peut avoir des valeurs plus grandes; par exemple, si la fonction définie par la série (4) n'a d'autres singularités que des pôles situés sur la partie positive de l'axe réel, le nombre R peut être pris aussi grand que l'on veut.

Quoiqu'il en soit, il résulte des hypothèses faites que si $f(z)$ a des points singuliers à l'intérieur du cercle (5) et qu'on désigne ces points par

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

on a

$$0 < a_k < R \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

et $f(z)$ peut, dans le voisinage de $z = a_k$, être représenté par une expression de la forme suivante:

$$f(z) = G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) + \mathfrak{P}_k(z - a_k),$$

$G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$ désignant un polynôme en $\frac{1}{x - a_k}$ et $\mathfrak{P}_k(z - a_k)$ étant une série de TAYLOR en $z - a_k$, convergente dans le voisinage de $z = a_k$.

3. Soit maintenant x un point régulier de $f(z)$ situé sur l'axe réel entre 0 et R; désignons par R_1 un nombre plus petit que R mais plus grand que x et les a_k:

$$0 \leqq x < R_1 < R; \qquad 0 < a_k < R_1 < R;$$

décrivons de l'origine comme centre avec le rayon R_1 un cercle C_1 et considérons l'intégrale suivante, prise dans le sens positif le long de C_1:

$$I = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - x} E\left(\frac{x}{z}, s\right) dz$$

E désignant la fonction définie plus haut.

Comme on a, pour tout point z de C_1:

$$\left| E\left(\frac{x}{z}, s\right) \right| < e \cdot \left(\frac{x}{R_1}\right)^\sigma$$

et que

$$\lim_{s = x} \sigma = +\infty$$

il en résulte que

$$\lim_{s = x} I = 0.$$

D'autre part, comme la fonction sous le signe d'intégration est uniforme et n'admet à l'intérieur de C_1 qu'un nombre fini de points singuliers, savoir les points

$$0, x, a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

le théorème de Cauchy est applicable et l'on peut écrire, en abrégé:

$$\int_{C_1} = \int_{(0)} + \int_{(x)} + \sum_{k=1}^{m} \int_{(a_k)}$$

$(0), (x), (a_k)$ désignant des petits cercles décrits respectivement des points $0, x, a_k$ comme centres et tels que, à l'intérieur de chacun d'eux, le centre soit le seul point singulier de la fonction

$$\frac{f(z)}{z - x} E\left(\frac{x}{z}, s\right). \tag{6}$$

Le résidu de cette fonction pour $z = x$ étant égal à $e^{-1}f(x)$ on a

$$\int_{(x)} = 2\pi i \cdot e^{-1} f(x).$$

Pour calculer le résidu correspondant à un pôle quelconque $z = a_k$, désignons pour abréger ce pôle par a et remarquons q'on peut écrire, dans un certain voisinage de $z = a_k$:

$$\frac{f(z)}{z - x} = \frac{A_1}{z - a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z - a)^\alpha} + \mathfrak{P}(z - a)$$

α étant l'ordre du pôle considéré, les A étant indépendants de z et $\mathfrak{P}$ étant holomorphe pour $z = a$. Le résidu cherché est donc égal à

$$A_1 E\left(\frac{x}{a}, s\right) + A_2 \frac{d}{da} E\left(\frac{x}{a}, s\right) + \ldots + A_\alpha \frac{1}{\underline{|\alpha - 1}} \frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}} E\left(\frac{x}{a}, s\right)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\int_{(a)} = 2\pi i \,.\, \sum_{\nu=1}^{\alpha} A_\nu \frac{1}{\underline{|\nu - 1}} \frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}} E\left(\frac{x}{a}, s\right).$$

Or comme $\frac{x}{a}$ peut être, selon les cas, soit inférieur à 1, soit supérieur à 1 mais n'est égal à 1 pour aucun des pôles a, il résulte de ce qui a été dit plus haut concernant la fonction E et ses dérivées, que l'expression obtenue tend vers *zéro* quand s croît indéfiniment. Nous avons donc:

$$\lim_{s=\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{(a_k)} = 0.$$

Il reste à considérer l'intégrale $\int_{(0)}$. En convenant de désigner généralement par $[F(z)]_{z^{-1}}$ le coefficient de z^{-1} dans le développement d'une fonction F en série de LAURENT dans le voisinage de $z = 0$, nous avons

$$\int_{(0)} = 2\pi i \left[\frac{f(z)}{z - x} E\left(\frac{x}{z}, s\right)\right]_{z^{-1}}.$$

Combinant les résultats obtenus nous obtenons donc enfin

$$e^{-1} f(x) = - \lim_{s=\infty} \left[\frac{f(z)}{z - x} E\left(\frac{x}{z}, s\right)\right]_{z^{-1}}$$

Pour calculer cette expression, remarquons que l'on a, dans le voisinage de $z = 0$:

$$\frac{f(z)}{z-x} = -\left(\frac{c_0}{x} + \frac{c_0 + c_1 x}{x^2} z + \ldots + \frac{c_0 + c_1 x + \ldots + c_\nu x^\nu}{x^{\nu+1}} z^\nu + \ldots\right)$$

$$E\left(\frac{x}{z}, s\right) = \left(\frac{x}{z}\right)^\sigma - \frac{1}{1}\left(\frac{x}{z}\right)^{\sigma+\tau} + \frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{z}\right)^{\sigma+2\tau} - \ldots$$

Le coefficient de z^{-1} dans le développement dont il s'agit est donc égal à

$$(7) \qquad -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{\sigma+\nu\tau-1} x^{\sigma+\nu\tau-1}).$$

4. Il est facile de voir que, quel que soit s, cette série converge pour toute valeur de x et représente une fonction *entière* de cette variable. En effet, désignons par ρ un nombre positif inférieur au rayon de convergence de la série (4). Pour toute valeur (réelle ou complexe) de x remplissant la condition

$$(8) \qquad |x| \leqq \rho$$

l'expression

$$(9) \qquad c_0 + c_1 x + \ldots + c_{\sigma+\nu\tau-1} x^{\sigma+\nu\tau-1}$$

est, en valeur absolue, moindre qu'une certaine constante g ce qui montre que la série (7) converge *uniformément* dans le domaine (8). D'ailleurs on a, d'après un théorème bien connu

$$|c_\nu| < g\rho^{-\nu}$$

g désignant la valeur maximum de $|f(x)|$ pour tous des points du domaine (8). Par là il résulte facilement que, pour toute valeur de x du domaine suivant

$$(10) \qquad |x| \geqq \rho$$

l'expression (9) est inférieure en valeur absolue à l'expression

$$(\sigma + \nu\tau) \cdot g \cdot \left|\frac{x}{\rho}\right|^{\sigma+\nu\tau}$$

ce qui prouve que la série (7) converge uniformément dans le domaine

$$K \geq |x| \geq \rho$$

K étant aussi grand qu'on le veut.

Par conséquent, la série étant uniformément convergente à l'intérieur de tout domaine fini, représente nécessairement, comme nous l'avons dit, une fonction entière de x.

Le résultat auquel nous sommes ainsi conduits peut s'énoncer de la manière suivante:

Théorème I. *Soit*

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{4}$$

une série de TAYLOR *convergente dans le voisinage de $z = 0$; soient σ et τ deux polynômes en s prenant des valeurs entières et positives toutes les fois que s est égal à un entier positif et formons la fonction entière*

$$F(x, s) = e \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{|\underline{\nu}} (c_0 + c_1 x + \dots + c_{\sigma+\nu\tau-1} x^{\sigma+\nu\tau-1}). \tag{11}$$

Pour toute valeur réelle et positive x telle que la fonction $f(z)$, définie par prolongement analytique de la série (4) à l'intérieur du cercle

$$|z| \leq x, \tag{12}$$

n'admet en dedans ou sur la limite de ce cercle d'autres singularités que des pôles réels, positifs et inférieurs à x on aura

$$f(x) = \lim_{s=\infty} F(x, s). \tag{13}$$

5. Parmi les diverses valeurs qu'on peut choisir pour σ et τ, les plus simples sont

$$\sigma = s \text{ et } \tau = s; \tag{14}$$

pour ces valeurs la formule obtenue prend la forme suivante:

$$f(x) = e \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{|\underline{\nu}} (c_0 + c_1 x + \dots + c_{s+\nu s-1} x^{s+\nu s-1}). \tag{15}$$

Mais nous verrons plus tard[1] qu'il y a avantage à remplacer les valeurs (14) par les suivantes

$$(16) \qquad \sigma = s^2, \; \tau = s$$

ce qui fournit la formule

$$(17) \qquad f(x) = e \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{\nu}} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1} x^{ss+\nu s-1})$$

valable, comme les précédentes, pour les valeurs positives de x définies dans le théorème I.

Pour abréger, nous désignerons la série figurant au second membre de (17) par le nom de fonction *associée* de la série de TAYLOR (4) et nous emploierons la notation

$$Ass. \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = e \,.\, \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{\nu}} (c_0 + c_1 z + \ldots + c_{ss+\nu s-1} z^{ss+\nu s-1}).$$

6. La fonction associée jouit de quelques propriétés simples qu'on vérifie immédiatement et dont nous aurons besoin dans la suite. Nous nous bornerons à les énoncer:

Si $f(z)$ est une série de TAYLOR donnée et K une constante quelconque on a

$$Ass.\, Kf(z) = K\, Ass.\, f(z);$$

si $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ sont des séries de TAYLOR données et $K_1, K_2, \ldots, K_m$ des constantes quelconques on a

$$Ass. \left(K_1 f_1(z) + \ldots + K_m f_m(z)\right) = \sum_{\nu=1}^{m} K_\nu\, Ass.\, f_\nu(z).$$

Pour

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

on a

$$Ass. \frac{1}{1-z} = \frac{1 - e z^{s^2} e^{-z^s}}{1-z};$$

[1] Voir la note à la fin du n:o 16.

si k est un entier positif on a

$$Ass.\ \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{\underline{|k}}\frac{d^k}{dx^k}\frac{1-e z^{k+s^2}e^{-z^s}}{1-z};$$

plus généralement, si a est une constante on a

$$Ass.\ \frac{1}{a-z} = \frac{1-e\left(\frac{z}{a}\right)^{s^2} e^{-\left(\frac{z}{a}\right)^s}}{a-z}$$

$$Ass.\ \frac{1}{(a-z)^{k+1}} = \frac{1}{|k}\frac{d^k}{dx^k}\frac{1-e\left(\frac{z}{a}\right)^{k+s^2} e^{-\left(\frac{z}{a}\right)^s}}{a-z}.$$

§ 2. *Remarques diverses.*

7. Il est facile de transformer les expressions obtenues en des séries de polynômes. Nous nous bornerons à le montrer pour le cas de l'expression (17).

Remarquons à cet effet que l'on a, d'après ce qui a été dit plus haut concernant l'expression (9)

$$|c_0 + c_1 x + \ldots c_{ss+\nu s-1}x^{ss+\nu s-1}| < g + g(s^2+\nu s)\left(\frac{x}{\rho}\right)^{ss+\nu s}$$

x désignant un nombre positif quelconque et g et ρ ayant la même signification que plus haut. Par là s'obtient facilement, m désignant un entier positif quelconque,

$$\sum_{\nu=m}^{\infty}\frac{1}{\nu}|c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1}x^{ss+\nu s-1}|$$

$$(18) \qquad < \frac{ge}{\underline{m}} + \frac{gs}{\underline{m-1}}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{ss+ms} . e^{\left(\frac{x}{\rho}\right)^s} . \left(1+\frac{s}{m}\right).$$

Or, m étant d'un ordre de grandeur supérieur à celui de $m^m e^{-m}$, on voit que, si l'on prend $m > s^s$, le second membre de (18) tend certainement vers zéro quand s augmente indéfiniment. Il en résulte que si l'on pose

(19) $$F(x\,,s) = e\,.\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1} x^{ss+\nu s-1})$$

(20) $$P(x\,,s) = e\,.\sum_{\nu=0}^{s^s} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1} x^{ss+\nu s-1})$$

on aura, quel que soit x:

$$\lim_{s=\infty} F(x\,,s) = \lim_{s=\infty} P(x\,,s).$$

Nous obtenons donc le théorème suivant:

Théorème II. *Si l'on forme le polynôme $P(x\,,s)$ défini par la formule* (20) *la fonction $f(x)$ est représentée par l'expression*

(21) $$f(x) = \lim_{s=\infty} P(x\,,s)$$

pour toute valeur réelle et positive x telle que $f(z)$ soit méromorphe en dedans et sur la limite du cercle

$$|z| = x$$

et que cette fonction n'admet dans ce cercle que des pôles réels situés entre 0 *et x.*

Comme on peut écrire

$$\lim_{s=\infty} P(x\,,s) = P(x\,,1) + \sum_{\nu=2}^{\infty}\big(P(x\,,\nu) - P(x\,,\nu-1)\big)$$

on obtient par là un développement de $f(x)$ en série de polynômes, valable pour les valeurs réelles et positives de x qui viennent d'être définies.

8. Nous nous sommes borné, dans ce qui précède, à considérer des valeurs réelles et *positives* de la variable x. Pour trouver des formules valables aussi pour des valeurs *négatives*, on n'a qu'à remplacer, dans les formules (13), (15), (17), (21), le nombre s par $2s$, s étant toujours

un nombre entier et positif. Pour le voir, il suffit de remarquer que la fonction $E(x, s)$ introduite plus haut satisfait aux conditions

$$\lim_{s=\infty} E(x, 2s) = \begin{cases} 0 \\ e^{-1} \end{cases}$$

selon que le nombre *réel* (positif ou négatif) x est différent de 1 ou égal à 1 et que l'on a

$$\lim_{s=\infty} \frac{d^k}{dx^k} E(x, 2s) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots)$$

pourvu que le nombre réel x soit distinct de 1.

Les développements ainsi obtenus convergent et représentent $f(x)$ en tout point réel x tel que $f(z)$ est holomorphe dans le voisinage de $z = x$ et n'admet, à l'intérieur ou sur la limite du cercle

$$|z| = |x|$$

d'autres singularités que des pôles réels.

Plus généralement, on parvient par un raisonnement analogue à l'énoncé suivant:

Théorème III. Si dans les formules (13), (15), (17), (21) on remplace s par ns, n désignant un entier positif quelconque, ces formules seront valables pour toute valeur de x de la forme

$$x = re^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

k étant un nombre quelconque de la suite

$$0, 1, 2, \ldots, n-1$$

et r étant un nombre positif et réel satisfaisant à la condition suivante: $f(z)$ est holomorphe dans le voisinage de $z = x$ et n'admet à l'intérieur ou sur la limite du cercle

$$|z| = |x|$$

d'autres singularités que des pôles

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

tels que

$$|a_\nu| < |x|, \qquad a_\nu^n = |a_\nu|^n.$$

Supposons, par exemple, que la série proposée (4) représente une fonction $f(z)$ méromorphe dans tout le plan et que tous les pôles a_ν de cette fonction satisfassent à la condition

$$a_\nu^n = |a_\nu|^n$$

n étant un entier positif donné.

Les coupures définissant dans ce cas l'étoile principale de M. MITTAG-LEFFLER sont des demi-droites issues des pôles les plus voisins de l'origine et faisant avec l'axe réel des angles respectivement egaux à

$$0, \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

Les expressions de M. MITTAG-LEFFLER fournissent la valeur de $f(z)$ dans tout le plan, *sauf* sur les coupures.

L'expression au contraire que l'on obtient en remplaçant s par ns dans la formule (21), représente (en dehors du cercle de convergence de la série (4)) la fonction $f(z)$ *seulement* sur les coupures dont il s'agit.

§ 3. *Prolongement analytique à l'intérieur de l'étoile méromorphe.*

9. Soit

$$\mathfrak{P}(z|a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots \tag{22}$$

une série de TAYLOR convergente dans le voisinage de $z = a$. Rappelons comment on définit, d'après M. MITTAG-LEFFLER, *l'étoile principale* correspondant aux constantes c.

Considérons une ligne droite l_θ issue du point $z = a$ et faisant un angle θ avec l'axe réel; formons le prolongement analytique de la série $\mathfrak{P}(z|a)$ en suivant cette droite. Il pourra se faire qu'on arrive à un point au delà duquel le prolongement analytique est impossible; si un tel point existe nous le désignerons par P_θ et nous désignerons par l'_θ la demi-droite obtenue en prolongeant indéfiniment l_θ au delà du point P_θ.

Enfin, θ variant depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$, nous ferons correspondre à chaque valeur de θ une *coupure* savoir la demi-droite l'_θ qui vient d'être définie (dans le cas où P_θ est infiniment éloigné de $z = a$, il n'y aura pas de coupure correspondante).

Ce qui reste du plan après qu'on a fait toutes ces coupures est l'étoile principale introduite par M. MITTAG-LEFFLER.

C'est un domaine simplement connexe A, à l'intérieur duquel la série $\mathfrak{P}(z|a)$ et son prolongement analytique définissent une branche uniforme d'une fonction analytique.

Dans ce qui suit nous désignerons cette branche par $f(z)$.

Les points P_θ sont appelés par M. MITTAG-LEFFLER des *sommets* de l'étoile A. Le *sommet* correspondant à une valeur déterminé θ n'est donc autre chose que le premier point singulier de la branche $f(z)$ qu'on rencontre en parcourant la demi-droite l_θ.

Les expressions découvertes par M. MITTAG-LEFFLER fournissent, comme on sait, la valeur de $f(z)$ dans tout le plan sauf sur les coupures l'_θ. Ce qui reste à faire, c'est de chercher la valeur de $f(z)$ quand la variable z, en suivant un chemin intérieur à l'étoile A, se rapproche d'un point appartenant à une coupure.

Considérons un sommet quelconque P_θ; si ce sommet n'est qu'un *pôle* de $f(z)$ il pourra arriver qu'en partant de P_θ et parcourant la coupure l'_θ, on ne rencontre jamais d'autres singularités de $f(z)$ que des *pôles;* dans ce cas nous désignerons la coupure l'_θ par l''_θ. Dans le cas contraire, on rencontre, en parcourant l'_θ, un premier point singulier de $f(z)$ qui ne soit pas un pôle. Nous désignerons le segment entre ce point et le point P_θ par l''_θ.

L'ensemble des segments l''_θ qu'on obtient ainsi en faisant varier θ de 0 jusqu'à 2π, sera désigné par L.

Nous nous proposons de former des expressions qui représentent $f(z)$ non seulement à l'intérieur de A mais aussi pour les points appartenant à L.

Si à l'ensemble des points intérieurs à l'étoile A on joint l'ensemble L, on obtient une étoile nouvelle M qui pourra s'appeler *l'étoile méromorphe* appartenant aux constantes c puisque c'est l'étoile la plus étendue

à l'intérieur de laquelle $f(z)$ est méromorphe[1]. Pour en distinguer l'étoile A, on pourrait appeler celle-ci *l'étoile holomorphe* appartenant aux constantes c.

En adoptant cette terminologie, le problème que nous nous proposons à résoudre peut se formuler ainsi:

Former une expression de $f(z)$ valable en tout point régulier z à l'intérieur de l'étoile méromorphe M.

10. Pour ramener ce problème au cas étudié au § 1, nous allons nous servir de la méthode de représentation conforme employée par M. Mittag-Leffler dans la troisième note (Acta mathematica, t. 24, p. 205). Cette méthode dépend d'une fonction dite »fonction génératrice» qui peut être définie d'une infinité de manières différentes. Pour notre but, la fonction génératrice la plus commode paraît être celle introduite et employée par M. Fredholm[2]. Cette fonction est définie par l'égalité

$$\varphi(u, \beta) = \frac{\log(1 - \beta u)}{\log(1 - \beta)} \tag{23}$$

où β est un nombre réel assujetti aux conditions

$$0 \leqq \beta < 1, \tag{24}$$

et jouit des propriétés suivantes:

Quand u décrit la circonférence

$$|u| = 1 \tag{25}$$

dans le sens positif, φ décrit dans le même sens un contour fermé S_β comprenant dans son intérieur le segment $0 - 1$ de l'axe réel; aux valeurs

$$u = 0, u = 1$$

[1] Un point z est à considérer comme intérieur à l'étoile M si on peut décrire autour du segment rectiligne joignant les points a et z un contour fermé T tel que $f(z)$ soit *méromorphe* à l'intérieur de T.

[2] Öfversigt af Kongl. Vet. Ak. Förh. 1901, p. 203. Voir aussi une note de M. Mittag-Leffler: *Sur une formule de M. Fredholm*, Comptes rendus (Paris), le 25 Mars 1901.

correspondent respectivement les valeurs

$$\varphi = 0 , \varphi = 1$$

et à une valeur réelle u entre 0 et 1 correspond une valeur de φ entre 0 et 1; pour $\beta = 0$ le contour S se réduit à une circonférence décrite de l'origine comme centre avec un rayon égal à un; enfin, quand β tend vers la valeur *un*, le contour S_β devient de plus en plus mince et se confond, à la limite, avec le segment $0 - 1$.

Ceci rappelé, désignons par x un point à l'intérieur de l'étoile méromorphe M dans le voisinage duquel $f(z)$ est holomorphe. Posons

$$\frac{z - u}{x - a} = \varphi(u, \beta); \tag{26}$$

la fonction z de u définie par cette formule réalise la représentation conforme du cercle (25) sur un contour S'_β semblable à S_β et jouissant des propriétés suivantes: aux valeurs

$$u = 0 , u = 1$$

correspondent les valeurs

$$z = a , z = x;$$

quand u décrit le segment $0 - 1$, z décrit le segment $a - x$; pour $\beta = 0$ S'_β se réduit à la circonférence

$$|z - a| = |x - a|$$

et quand β tend vers l'unité, S'_β s'aplatit et se raccourcit indéfiniment et se confond, à la limite, avec le segment $a - x$.

Or $f(z)$ étant méromorphe tout le long du segment $a - x$ et holomorphe aux extrémités $z = a$ et $z = x$, on en conclut qu'il existe un nombre positif $B < 1$ tel que, pour toute valeur de β satisfaisant aux conditions

$$B \leqq \beta < 1, \tag{27}$$

$f(z)$ soit méromorphe à l'intérieur du contour S'_β et sur ce contour et que, en outre, tous les pôles de $f(z)$ appartenant à ce domaine soient situés sur le segment rectiligne joignant les points a et x.

Donc, par le changement de variable (26) (où β est assujetti aux conditions (27)), $f(z)$ se transforme en une fonction $f_1(u)$ méromorphe à l'intérieur et sur la limite du cercle

$$|u| = 1$$

et n'admettant dans ce domaine que des pôles réels situés entre $u = 0$ et $u = 1$.

11. Les résultats obtenus au § 1 sont donc applicables à cette fonction $f_1(u)$.

D'après la formule de M. FREDHOLM (loc. cit. p. 205), le développement de $f_1(u)$ en série de TAYLOR dans le voisinage de $u = 0$ peut s'écrire sous la forme symbolique très simple

$$f_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n u^n}{\underline{|n}} \frac{x-a}{H} \frac{d}{da}\left(\frac{x-a}{H}\frac{d}{da} + 1\right) \cdot \cdot \left(\frac{x-a}{H}\frac{d}{da} + n - 1\right) f(a)$$

où l'on a posé

$$H = -\log(1-\beta);$$

les coefficients

$$\frac{1}{\underline{|\nu}} \frac{d^\nu}{da^\nu} f(a) = c_\nu$$

qui y figurent sont identiques aux coefficients définissant la série donnée (22)[1].

Comme z se réduit à x pour $u = 1$ on a

$$f(x) = f_1(1)$$

---

[1] En posant

$$\lambda(\lambda+1) \cdot \cdot (\lambda + n - 1) = \lambda^n + E_1^{(n)} \lambda^{n-1} + \cdot \cdot + E_{n-1}^{(n)} \lambda$$

le produit symbolique

$$\frac{x-a}{H} \frac{d}{da}\left(\frac{x-a}{H}\frac{d}{da} + 1\right) \cdots \left(\frac{x-a}{H}\frac{d}{da} + n - 1\right) f(a)$$

peut être remplacé par le polynôme

$$E_{n-1}^{(n)} c_1 \frac{x-a}{H} + \cdot \cdot + E_1^{(n)} \underline{|n-1} \cdot c_{n-1} \left(\frac{x-a}{H}\right)^{n-1} + \underline{|n} \cdot c_n \cdot \left(\frac{x-a}{H}\right)^n$$

et il suffit donc à appliquer à $f_1(1)$ les développements des paragraphes précédents pour avoir l'expression cherchée de $f(x)$ dans toute l'étoile méromorphe.

En posant pour abréger:

$$(28)\quad \begin{cases} C_0(x, \beta) = f(a), \\ C_n(x, \beta) = \dfrac{\beta^n}{|\underline{n}} \dfrac{x-a}{H} \dfrac{d}{da}\left(\dfrac{x-a}{H}\dfrac{d}{da} + 1\right) \ldots \left(\dfrac{x-a}{H}\dfrac{d}{da} + n - 1\right) f(a) \end{cases}$$

on a, en employant la notation introduite au n:o 6,

$$Ass.\ f_1(u) = e \, . \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{|\underline{\nu}} (C_0 + C_1 u + \ldots + C_{s+\nu s-1} u^{s+\nu s-1}) \, .$$

Mettant $u = 1$ et appliquant le théorème I nous obtenons donc le théorème suivant:

Théorème IV. *Si l'on choisit un nombre positif β d'après les conditions* (27) *et qu'on forme la fonction suivante:*

$$(29)\qquad F(x, \beta, s) = e \, . \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{|\underline{\nu}} (C_0 + C_1 + \ldots + C_{s+\nu s-1})$$

où les C sont des polynômes en x définis par les formules (28), *on aura*

$$(30)\qquad f(x) = \lim_{s=\infty} F(x, \beta, s)$$

x étant un point régulier de $f(z)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe M.

Le point x étant fixé, le nombre β doit être supérieur à un certain nombre B qui dépend, en général, de x; si l'on fixe la valeur de β, la formule (30) n'est valable que dans un certain domaine M' intérieur à M. Mais nous savons d'après ce qui précède que, quand β croît indéfiniment vers la valeur *un*, le domaine M' s'étend de plus en plus et se confond, à la limite, avec M. Il en résulte que l'expression

$$\lim_{\beta=1} \lim_{s=\infty} F(x, \beta, s)$$

converge et représente la valeur de $f(x)$ en tout point régulier x à l'intérieur de l'étoile méromorphe.

12. On peut simplifier la formule ainsi obtenue:

$$f(x) = \lim_{\beta=1} \lim_{s=\infty} F(x, \beta, s) \tag{31}$$

de la manière suivante.

Soit x en point régulier fixe de $f(z)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe et soit E un nombre positif aussi petit qu'on le veut; d'après ce que nous avons vu, on peut faire correspondre à tout nombre β remplissant (27) un nombre positif s' tel que l'on ait

$$|f(x) - F(x, \beta, s)| < \frac{E}{2} \tag{32}$$

dès que:

$$s > s'.$$

Soit ρ_1 un nombre positif inférieur au rayon de convergence de la série (22) et désignons par G le maximum du module de cette série à l'intérieur du domaine

$$|z - a| \leqq \rho_1 . \tag{33}$$

Soit ρ un nombre positif tel que, pour toute valeur de u du domaine

$$|u| \leqq \rho \tag{34}$$

la valeur correspondante de z, définie par l'égalité (26), satisfasse à la condition

$$|z - a| \leqq \rho_1 .$$

Comme on a

$$|f(z)| \leqq G$$

quand z appartient au domaine (33), on a

$$|f_1(u)| \leqq G$$

tant que u reste dans le domaine (34).

Il en résulte que les coefficients $C_\nu(x, \beta)$ figurant dans le développement

$$f_1(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(x, \beta) u^\nu$$

satisfont à la condition suivante:

$$|C_\nu(x, \beta)| \leqq G \rho^{-\nu}$$

d'où résulte, par le même raisonnement qui nous a conduit à l'inégalité (18), que l'on a

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left| C_0 + C_1 + \dots + C_{ss+\nu s-1} \right|$$

$$< \frac{Ge}{m!} + \frac{Gs}{(m-1)!} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{ss+ms} e^{\left(\frac{1}{\rho}\right)^s} \left(1 + \frac{s}{m}\right)$$

m étant un entier positif quelconque.

Or, le second membre dans cette formule tendant vers zéro avec $\frac{1}{s}$ si l'on prend

$$m > s',$$

on aura, en posant

$$(35) \quad P(x, \beta, s) = e \,.\, \sum_{\nu=0}^{s'} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left\{ C_0(x, \beta) + C_1(x, \beta) + \dots + C_{ss+\nu s-1}(x, \beta) \right\}$$

l'inégalité suivante:

$$(36) \quad \left| F(x, \beta, s) - P(x, \beta, s) \right| < \frac{E}{2}$$

dès que

$$s > s''$$

où s'' est un nombre positif suffisamment grand.

Il résulte alors des formules (32) et (35) que l'on a

$$\left| f(x) - P(x, \beta, s) \right| < E$$

tant que l'entier positif s est supérieur à s' et à s''.

Nous pouvons, par conséquent, énoncer le théorème suivant:

Théorème V. *Soit*

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

une série de TAYLOR *convergente dans le voisinage de $z = a$ et désignons par $f(z)$ la branche uniforme de fonction analytique définie par cette série et son prolongement analytique à l'intérieur de l'étoile méromorphe M appartenant aux constantes c. Si l'on définit les polynômes C_n par la formule* (28) *et le polynôme $P(x, \beta, s)$ par l'égalité* (35) *on aura*

$$(37) \quad f(x) = \lim_{\beta=1} \lim_{s=\infty} P(x, \beta, s)$$

en tout point régulier de $f(x)$ à l'interieur de l'étoile M.

On peut en déduire facilement que $f(x)$ est représentable à l'intérieur de M par une ***série de polynômes.***

13. Par définition, l'étoile M est un domaine continu comprenant d'une part tous les points appartenant à l'étoile holomorphe (ou principale) A, d'autre part la partie des coupures l'_θ que nous avons désignée par L.

Soit X un domaine compris tout entier en dedans de A; il résulte facilement des formules précédentes que le développement (37) converge ***uniformément*** dans X.

Soit d'autré part L_1 un segment d'une coupure quelconque appartenant à L tel qu'il n'y a sur ce segment (y compris les points qui le limitent) aucun point singulier de $f(x)$. La formule (37) non seulement a lieu le long de L_1, mais le second membre converge ***uniformément*** sur ce segment.

Au contraire, dans une aire embrassant un tel segment L_1, l'expression ne converge pas uniformément puisque le nombre B (n:o 10) tend vers ***l'unité*** quand x se rapproche de L[1].

14. Dans le cas particulier où tous les pôles de $f(x)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe sont situés sur une ligne droite l issue du point a, il suffit, pour avoir une expression de $f(x)$ valable sur l, de mettre dans les formules précédentes $\beta = 0$ ce qui donne

$$H = 0$$

$$C_n(x, \beta) = \frac{(x-a)^n}{\lfloor n} \frac{d^n}{da^n} f(a) = c_n (x-a)^n$$

$$P(x, \beta, s) = e . \sum_{\nu=0}^{s^s} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor \nu} (c_0 + c_1 (x-a) + \ldots + c_{ss+\nu s-1} (x-a)^{ss+\nu s-1})$$

et enfin

$$f(x) = e . \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=0}^{s^s} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor \nu} (c_0 + c_1 (x-a) + \ldots + c_{ss+\nu s-1} (x-a)^{ss+\nu s-1})$$

pour tout point régulier situé sur l.

La formule générale (37) se réduit donc, dans le cas envisagé, à celle que nous avons obtenu au § 2.

[1] D'ailleurs, d'après une remarque que je dois à M. PHRAGMÉN, *aucune* série de polynômes représentant $f(x)$ dans M ne saurait converger uniformément dans une telle aire.

15. Comme application du résultat obtenu, considérons le cas où la série (22) définit une fonction $f(z)$ méromorphe dans tout domaine fini. Dans ce cas, l'étoile méromorphe M embrasse tout le plan et nous avons le résultat suivant: *l'expression:*

$$\lim_{\beta=1} \lim_{s=\infty} P(x, \beta, s)$$

définie plus haut converge et représente $f(x)$ en tout point régulier du plan.

§ 4. *Recherche des points singuliers. — Conclusion.*

16. Dans ce qui précède nous avons formé des expressions de $f(x)$ valables en tout point régulier de $f(x)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe M.

Une question qui se pose nécessairement est donc la suivante: étant donné un point ξ à l'intérieur de l'étoile M, décider si ξ est un point *régulier* ou un point *singulier* pour $f(x)$.

Pour étudier cette question, il convient d'employer les notations introduites au n:o 6.

Supposons qu'un point donné ξ à l'intérieur de l'étoile M soit un point singulier de $f(z)$; comme $f(z)$ est méromorphe dans le voisinage de $z = \xi$ nous pouvons écrire

$$(38) \qquad f(z) = \frac{A_1}{\xi - z} + \frac{A_2}{(\xi - z)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(\xi - z)^\alpha} + \mathfrak{P}(z - \xi)$$

en désignant par α l'ordre du pôle ξ, par A certaines constantes et par $\mathfrak{P}$ une fonction holomorphe au point $z = \xi$.

Par la transformation

$$(39) \qquad z - a = (\xi - a) \frac{\log(1 - \beta u)}{\log(1 - \beta)}$$

employée plus haut $f(z)$ se transforme en une fonction $f_1(u)$; d'après ce qui précède, il y a un nombre positif $B < 1$ tel que, pour toute valeur de β remplissant les conditions

$$(40) \qquad B \leq \beta < 1,$$

cette fonction $f_1(u)$ soit méromorphe à l'intèrieur et sur le contour du cercle

$$(41) \qquad |u| = 1$$

et que tous les pôles de $f_1(u)$ dans ce domaine soient réels et positifs. Comme les points $z = \xi$, $u = 1$ se correspondent, le point $u = 1$ est un pôle de $f_1(u)$ et l'on peut écrire

$$(42) \qquad f_1(u) = \frac{B_1}{1-u} + \frac{B_2}{(1-u)^2} + \cdots + \frac{B_a}{(1-u)^a} + \mathfrak{P}_1(u-1)$$

les B étant des constantes qui s'expriment linéairement par rapport aux A et $\mathfrak{P}_1$ étant holomorphe pour $u = 1$.

Il nous faut maintenant calculer la valeur de la fonction *associée* de $f_1(u)$ pour $u = 1$ c'est-à-dire la valeur de la fonction $F(x, \beta, s)$, définie par la formule (29), au point correspondant $x = \xi$.

En vertu des propriétés de la fonction associée (n:o 6) on a

$$(43) \qquad Ass.\ f_1(u) = Ass.\ \mathfrak{P}_1(u-1) + \sum_{k=0}^{a-1} B_{k+1}\ Ass.\ \frac{1}{(1-u)^{k+1}}$$

$$= Ass.\ \mathfrak{P}_1(u-1) + \sum_{k=0}^{a-1} \frac{B_{k+1}}{\underline{|k}} \frac{d^k}{du^k} \frac{1 - e\,u^{k+\sigma} e^{-u^s}}{1-u}$$

où l'on a posé $s^2 = \sigma$ pour abréger.

Or comme

$$\frac{1 - e\,u^{k+\sigma} e^{-u^s}}{1-u} = e \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (1 + u + u^2 + \cdots + u^{\sigma+\nu s+k-1})$$

on peut écrire

$$\frac{d^k}{du^k} \frac{1 - e\,u^{k+\sigma} e^{-u^s}}{1-u} = e \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} \frac{d^k}{du^k} \frac{1 - u^{k+\sigma+\nu s}}{1-u}$$

et il suffit donc de calculer la valeur de la fonction

$$\frac{d^k}{du^k} \frac{1 - u^{k+\sigma+\nu s}}{1-u}$$

pour $u = 1$. A cet effet, remarquons que l'on a, m désignant un entier positif quelconque,

$$\left(\frac{d^k}{du^k}\frac{1-u^{k+m}}{1-u}\right)_{u=1} = \sum_{\nu=k}^{m+k-1} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1) = \frac{m(m+1)\ldots(m+k)}{k+1}.$$

Il en résulte

$$\left(\frac{d^k}{du^k}\frac{1-eu^{k+\sigma}e^{-u^s}}{1-u}\right)_{u=1} = e\,.\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{|\nu}\frac{(\sigma+\nu s)(\sigma+\nu s+1)\ldots(\sigma+\nu s+k)}{k+1}$$

$$= \frac{e}{k+1}\left(\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}}u^{k+\sigma}e^{-u^s}\right)_{u=1}$$

quel que soit l'entier positif k. (Pour $k = 0$, il faut supprimer l'opération $\frac{d^k}{du^k}$ devant la fraction dans le premier membre.)

En formant, d'après la formule classique, la dérivée k^{me} du produit des deux fonctions

$$u^{k+\sigma} \text{ et } e^{-u^s}$$

on obtient, pour $u = 1$, une expression de la forme suivante:

$$\left(\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}}u^{k+\sigma}e^{-u^s}\right)_{u=1} = \theta_k(\sigma, s)$$

où θ_k désigne un polynôme entier de degré $k+1$ en σ et s dans lequel le coefficient de σ^{k+1} est égal à e^{-1}. Pour $\sigma = s^2$, on obtient, donc un polynôme $\theta_k(s^2, s)$ dans lequel le coefficient de la plus haute puissance de s, savoir s^{2k+2}, est égal à e^{-1}.

Nous pouvons donc écrire

$$\left(\frac{d^k}{du^k}\frac{1-e\,u^{k+\sigma}e^{-u^s}}{1-u}\right)_{u=1} = \frac{s^{2k+2}}{k+1} + \ldots.$$

les termes omis du second membre étant de degré inférieur à $2k+2$ par rapport à s.

Portant ces valeurs dans la formule (43) et mettant $u = 1$ on obtient, en se rappelant la relation

$$(Ass.\ f_1(u))_{u=1} = F(\xi, \beta, s),$$

la formule suivante

(44) $$F(\xi, \beta, s) = K_s + \frac{B_\alpha}{\lfloor \alpha} s^{2\alpha} + \ldots$$

les termes omis étant linéaires et homogènes par rapport à $B_{\alpha-1} \ldots B_1$ et de degré moindre que $2\alpha - 1$ par rapport à s; K_s désigne la valeur que prend la fonction

$$Ass.\ \mathfrak{P}_1(u - 1)$$

pour $u = 1$.

Comme $\mathfrak{P}_1(u - 1)$ est holomorphe au point $u = 1$ on a d'après le théorème I,

$$\lim_{s=\infty} K_s = \mathfrak{P}_1(0).$$

Le nombre β ayant une valeur fixe satisfaisant aux conditions (40) et A_α désignant par hypothèse le coefficient de la plus haute puissance négative de $\xi - z$ dans le développement de $f(z)$, on voit sans difficulté que B_α est une quantité différente de zéro.

La formule (44) montre, par suite, que le pôle ξ satisfait nécessairement à la condition[1]

(45) $$\lim_{s=\infty} |F(\xi, \beta, s)| = \infty.$$

17. Ce résultat fournit déjà un critère pour décider si ξ est singulier ou régulier. Mais on peut le simplifier en remplaçant F par le polynôme P défini par la formule (35).

En effet, β étant un nombre satisfaisant aux conditions (40) et ξ étant un point quelconque à l'intérieur de l'étoile méromorphe, nous savons, d'après ce qui a été démontré au n:o 12 que l'on a

(46) $$\lim_{s=\infty} (F(\xi, \beta, s) - P(\xi, \beta, s)) = 0$$

d'où l'on voit que la condition

$$\lim_{s=\infty} |P(\xi, \beta, s)| = \infty$$

---

[1] Si au lieu des valeurs (16) de σ et τ nous avions choisi les valeurs plus simples (14), c'est-à-dire si nous nous étions servi de $x^s e^{-x^s}$ comme facteur de discontinuité au lieu de $x^{s^2} e^{-x^s}$, la formule (45) n'aurait pas eu lieu en général.

est *nécessaire* pour que ξ soit un pôle de $f(z)$. Cette condition est d'ailleurs *suffisante* aussi, car pour un point *régulier* ξ l'égalité (45) ne peut pas avoir lieu puisque nous savons que l'on a

$$\lim_{s=\infty} P(\xi, \beta, s) = f(\xi)$$

dans ce cas.

On peut ajouter que, une fois décidé si ξ est un pôle ou non, les formules précédentes permettent d'évaluer les valeurs des coefficients A figurant dans le développement (38).

Dans ce qui précède, je me suis borné à former et à étudier le prolongement analytique d'une série de TAYLOR à l'intérieur de son étoile *méromorphe.*[1] Mais par la considération de certains exemples, j'ai trouvé que les formules obtenues restent vraies dans des domaines encore plus étendus. Et il me paraît probable que les méthodes employées doivent pouvoir s'étendre à la solution de ce problème général:

Former le prolongement analytique de $f(z)$ à l'intérieur de son étoile *uniforme,* c'est-à-dire dans l'étoile la plus étendue de centre a à l'intérieur de laquelle $f(z)$ reste uniforme.

Mais cette nouvelle question m'entraînerait trop loin et je me borne à la signaler.[2]

---

[1] Un résumé de cette recherche a été publié précédemment dans ma note »*Applications nouvelles de la fonction exponentielle*» (Bih. till K. Svenska Vet.-Ak. Förh., 12 Février 1902).

[2] Pendant l'impression du présent travail j'ai eu connaissance d'une note très intéressante que vient de publier M. PAINLEVÉ sur le même sujet (*Comptes rendus,* 7 Juillet 1902). Par une méthode entièrement différente de la nôtre M. PAINLEVÉ arrive à des résultats qui ont beaucoup de rapport aux précédents et parvient même, dans certains cas, à une représentation de la fonction à l'extérieur de l'étoile uniforme. Cependant il me semble que les formules que j'ai obtenues présentent, dans leur domaine de validité, certains avantages. Dans la recherche des singularités, par exemple, elles ne sauraient être remplacées par les formules de M. PAINLEVÉ, car celles-ci n'indiquent pas, semble-t-il, si un point du domaine considéré est singulier ou non.

SUR LA STRATIFICATION D'UNE MASSE FLUIDE EN ÉQUILIBRE

PAR

VITO VOLTERRA

À ROME.

1. ABEL a été amené par un problème de mécanique à envisager pour la première fois la question de l'inversion des intégrales définies. En effet c'est le problème des *tautochrones* généralisé qui l'a conduit, par un vrai coup de génie, à sa célèbre formule d'inversion qui se trouve dans le mémoire qu'il a publié en 1823 sous le titre: *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*[1]. Cette formule qui correspond à un cas très-particulier d'inversion a reçu bien d'applications dans beaucoup de questions de physique mathématique, de mécanique et d'analyse. LIOUVILLE peu de temps après ABEL, et sans connaître son résultat, a tâché de résoudre une classe intéressante de questions par l'invention d'un nouveau calcul qu'il appelait des différentielles à indices quelconques.

Mais les formules de LIOUVILLE ne sont que des transformations de celle d'ABEL.

On a donné après un grand nombre de démonstrations du résultat trouvé par ABEL, et on en a multiplié les applications; cependant rien de réellement nouveau n'a été fait, par rapport à la question de l'inversion, jusqu'à l'année 1884 M. SONINE a donné dans les Acta Mathematica une

---

[1] Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 2, Christiania 1823. — Oeuvres, Christiania 1881, T. 1er page 11.

Voir aussi le Mémoire: *Resolution d'un problème de Mécanique.* Journ. f. d. reine und ang. Math. her. v. CRELLE, Bd. 1, Berlin 1826. — Oeuvres, Christiania 1881. T. 1er page 97.

nouvelle formule. M. SONINE envisage aussi un cas particulier d'inversion, mais sa formule n'est pas une transformation de celle qui avait été donnée par ABEL, mais c'est une vraie généralisation de cette formule.

Dans quelques travaux que j'ai publiés en 1896 et 1897 [1] j'ai donné la solution de la question générale de l'inversion des intégrales définies. Cette solution peut s'obtenir en supposant seulement certaines conditions peu restrictives sur la continuité et sur l'ordre d'infini des fonctions qui paraissent dans les calculs.

Cependant il y a des cas pratiques dans lesquels ces conditions ne sont pas vérifiées, et il faut alors recourir à des artifices particuliers, quelque fois très-pénibles pour arriver au but. Dans cette Note j'envisage précisément un de ces cas qui ressort d'une question de mécanique céleste. Le problème se réduit à la détermination d'une fonction inconnue qui paraît sous une intégrale définie, tout à fait comme dans le problème des courbes tautochrones étudié par ABEL. Mais, si l'on veut résoudre ce cas dans toute sa généralité, il faut imaginer des méthodes nouvelles.

2. Je vais maintenant éclaircir en quelques mots la question de mécanique céleste à laquelle je me rapporte.

Le problème de l'équilibre d'une masse fluide hétérogène qui tourne autour d'un axe avec une vitesse uniforme, joue un rôle très-important dans l'astronomie théorique, parce que c'est le fondement du calcul de la figure des corps célestes.

Un examen approfondi des stratifications qui sont compatibles avec l'équilibre n'est pas très-avancé, et presque tous les résultats rigoureux qu'on a là-dessus sont des résultats négatifs. Cependant même des résultats négatifs ont un grand intérêt dans ce genre de recherches. Pour mettre cela en pleine lumière, il suffit de remarquer que, même dans le cas des fluides homogènes, on ne possède pas des méthodes directes par lesquelles on peut

---

[1] *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota I, II, III, IV, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino 1896.

Sulla inversione degli integrali definiti. Rend. della R. Accademia dei Lincei, Roma 1896.

Sulla inversione degli integrali multipli. Ibid. 1896.

Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti. Annali di Matematica, Milano 1897.

déterminer des figures d'équilibre. Les calculs classiques de MAC-LAURIN et de JACOBI, par exemple, ne sont que des vérifications que les ellipsoïdes peuvent être des figures d'équilibre. C'est pourquoi il y a un vrai intérêt à établir que certaines formes ou certaines stratifications sont impossibles. Mais dans la plupart des cas ces propositions négatives ne s'obtiennent qu'avec beaucoup d'effort.

Entre toutes ces propositions il y en a une qu'il est intéressant de mettre hors de doute d'une manière rigoureuse et complète. Rapportons nous aux méthodes de MAC LAURIN et de JACOBI. Leurs succès ressort de la forme extrêmement simple du potentiel d'un ellipsoïde homogène. Or l'expression du potentiel reste aussi simple lorsque l'ellipsoïde étant hétérogène est stratifié par couches homothétiques et concentriques. Il s'agit donc de vérifier s'il y a des figures d'équilibre des fluides ainsi stratifiés.

Au premier abord cette question semble déja tranchée d'une manière négative par les remarquables résultats de M. HENRY et de M. POINCARÉ; mais puisque ces auteurs se rapportent à une masse discontinue, on comprend, si on regarde plus de près, que la proposition n'est pas encore complète [1].

Le but de ce mémoire est d'établir d'une manière générale cette proposition négative. C'est la généralité qu'on laisse à la densité qui engendre la difficulté de la question [2]. En effet on ne peut pas employer les procédés de M. HENRY et de M. POINCARÉ, et dès qu'on impose à la densité la seule condition d'être une fonction intégrable, on tombe sur un problème d'inversion qui n'est soluble que par des méthodes nouvelles.

Nous partagerons notre recherche en trois parties. Dans le premier § nous établirons la relation (A) fondamentale entre deux fonctions inconnues. En utilisant cette relation nous envisagerons dans le second § le cas de l'ellipsoïde de révolution, et dans le troisième § celui de l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

---

[1] Voir la 1ère Note à la fin du Mémoire.

[2] Voir la IIème et la IIIème Note à la fin du Mémoire.

I.

1. Soient $2a$, $2b$, $2c$ les axes d'un ellipsoïde. Si on le rapporte à ses axes principaux, son équation sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Chaque ellipsoïde interne homothétique et concentrique aura pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - h \qquad (0 < h < 1). \tag{2}$$

Si la matière qui remplit l'ellipsoïde est stratifiée par couches homothétiques et concentriques, la densité ρ sera une fonction de h. Nous supposerons que $\rho(h)$ soit une fonction positive finie et intégrable. Dans cette hypothèse, l'ensemble des valeurs de h pour lesquelles $\rho(h)$ est continue, est condensé dans toute partie du domaine $(0, 1)$.

A cause de la définition de la densité, on a que la masse d'une portion quelconque de l'ellipsoïde, et sa fonction potentielle ne changeront pas en changeant les valeurs de $\rho(h)$ dans les points où cette fonction n'est pas continue, pourvu qu'elle reste toujours intégrable.

C'est pourquoi nous pourrons changer d'une manière arbitraire les valeurs données de la densité $\rho(h)$ dans les points où elle est discontinue en conservant pour cette fonction la propriété d'être intégrable, et on pourra remplacer la primitive expression de la densité par la nouvelle expression.

Cela posé, il est connu que la fonction potentielle dans tout point x, y, z qui fait partie de la masse de l'ellipsoïde est donnée par

$$V = \pi abc \int_0^\infty \varphi(\mu) \frac{d\lambda}{\sqrt{D}}$$

où

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}, \qquad D = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \tag{3}$$

$$\varphi(\mu) = \int_0^\mu \rho(\mu) d\mu.$$

2. Supposons maintenant que l'ellipsoïde tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe z. Il faut distinguer deux cas: celui où l'on peut trouver deux nombres h_0 et h_1 tels que

$$0 < h_0 < h_1 < 1$$

$\rho(h)$ étant constant pour toutes les valeurs de h comprises entre h_0 et h_1; et le cas où cette condition n'est pas verifiée.

Dans le premier cas on peut démontrer que l'équilibre de la masse fluide n'est pas possible, en réduisant ce cas à celui envisagé par M. Poincaré. En effet, si l'équilibre était possible, il subsisterait même en retranchant la portion de fluide comprise entre la surface libre et l'ellipsoïde qui correspond au paramètre h_0. Alors on trouverait un fluide dont la partie externe est homogène et en même temps est comprise entre deux ellipsoïdes qui ne sont pas homofocaux. Cette condition est incompatible avec l'équilibre [1].

3. Nous allons donc envisager le second cas. La fonction potentielle de l'attraction newtonienne et de la force centrifuge est donnée par

$$W = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Pour l'équilibre il faut que W soit constante sur les surfaces où la densité est constante. Il faudra donc que l'on ait

$$W = \psi(h),$$

c'est pourquoi on aura l'équation

$$\text{(A)} \qquad \pi abc \int_0^\infty \varphi(\mu) \frac{d\lambda}{\sqrt{D}} = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \psi(h).$$

4. Il est facile de démontrer que si $\omega \gtrless 0$ l'éllipsoïde ne peut pas se réduire à une sphère.

En effet pour $a = b = c$, on aurait

$$\mu = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + \lambda} \qquad h = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}$$

c'est pourquoi V et ψ seraient des fonctions de $x^2 + y^2 + z^2$.

---

[1] Journal de Mathématiques fondé par J. Liouville. IV Série. T. VI, 1890, page 69.

Écrivons maintenant l'équation (A) sous la forme

$$V - \psi = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Cette équation serait absurde si $V - \psi$ était une fonction de $x^2+y^2+z^2$. Il faut donc envisager deux cas:

1er cas $\qquad a = b \gtrless c$

2ème cas $\qquad a \gtrless b$.

II.

1. Soit $a = b$. En posant $x^2 + y^2 = r^2$ nous aurons

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu = 1 - \dfrac{r^2}{a^2 + \lambda} - \dfrac{z^2}{c^2 + \lambda}, \\ h = 1 - \dfrac{r^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2}, \end{cases}$$

d'où

$$\mu = \frac{\lambda}{c^2 + \lambda} - \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{a^2(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} h.$$

L'équation (A) s'écrira

$$\pi^2 a^2 c \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{c^2 + \lambda} - \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{a^2(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} h\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{D}} = -\frac{\omega^2}{2} r^2 + \psi(h),$$

et si nous dérivons par rapport à r^2, on aura puisque ρ est intégrable,

$$-\pi^2 c \int_0^\infty \rho\left(\frac{\lambda}{c^2 + \lambda} - \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{a^2(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} h\right) \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)\sqrt{D}} d\lambda = -\frac{\omega^2}{2}.$$

Posons

$$(2) \qquad \pi^2 c \rho = \chi,$$

l'équation précédente deviendra

$$(3)\qquad \int_0^\infty \chi(\mu)\frac{\lambda d\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\omega^2}{2(a^2-c^2)}.$$

χ est une fonction positive. On en tire

$$a > c,$$

c'est à dire l'axe de rotation est le petit axe de l'éllipsoïde.

2. En posant

$$(4)\qquad \frac{r^2}{a^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda} = \xi, \qquad \frac{r^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} = \theta$$

on aura

$$\mu = 1-\xi$$

$$(5)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\xi} = -\frac{1}{\theta}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial r^2} = \frac{1}{(a^2+\lambda)\theta}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z^2} = \frac{1}{(c^2+\lambda)\theta}.$$

Prenons dans le premier membre de l'équation (3) pour variable d'intégration ξ au lieu de λ; cette équation s'écrira

$$\int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\,d\xi = \frac{\omega^2}{2(a^2-c^2)}.$$

Si nous dérivons par rapport à r^2 et à z^2 en remarquant que la quantité sous l'intégrale s'annule à la limite supérieure, non aurons

$$(6)\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial}{\partial r^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]d\xi = 0,$$

$$(6')\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial}{\partial z^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]d\xi = 0.$$

Or, par des calculs qui ne présentent pas de difficultés, on trouve, ayant égard aux relations (5),

$$\frac{\partial}{\partial r^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{2}\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{2}\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta}.$$

En remplaçant dans les équations (6) et (6′) les premiers membres des équations précédentes par les seconds membres, et en faisant des intégrations par parties, on peut écrire les équations (6) et (6′) sous la forme

$$(6_a)\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]d\xi=0,$$

$$(6'_a)\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta}\right]d\xi=0,$$

où l'on a posé

$$(7_a)\qquad f(\xi)=-\chi(1-\xi)\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{2}\int_0^{\xi}\chi(1-\xi)\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta}d\xi.$$

3. Supposons maintenant $z=0$, et posons

$$\frac{r^2}{a^2}=y,\qquad \frac{a^2-c^2}{a^2}=\varepsilon.$$

En vertu des équations (4) nous aurons

$$\lambda = a^2\frac{y-\xi}{\xi}, \qquad a^2+\lambda = a^2\frac{y}{\xi}, \qquad c^2+\lambda = a^2\frac{y-\varepsilon\xi}{\xi}, \qquad \theta = \frac{a^2 y}{\xi^2},$$

et par suite les relations (6^a), ($6'_a$) et (7_a) deviendront, pour $z = 0$,

$$(6_b) \qquad \int\limits_0^y f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{y-\xi}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{3}{2}}}d\xi = 0,$$

$$(6'_b) \qquad \int\limits_0^y f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{y-\xi}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}d\xi = 0,$$

$$(7_b) \qquad f(\xi) = \left[-\chi(1-\xi)\xi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\int\limits_0^\xi \chi(1-\xi)\xi^{\frac{1}{2}}d\xi\right]\frac{1}{a^3 y^{\frac{3}{2}}},$$

ou même

$$(6_c) \qquad \int\limits_0^y \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{y-\xi}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{3}{2}}}d\xi = 0,$$

$$(6'_c) \qquad \int\limits_0^y \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{y-\xi}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}d\xi = 0,$$

$$(7_c) \qquad \psi(\xi) = -\chi(1-\xi)\xi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\int\limits_0^\xi \chi(1-\xi)^{\frac{1}{2}}d\xi.$$

Il est évident que $\psi(\xi)$ et $\chi(1-\xi)$ sont des fonctions continues pour les mêmes valeurs de ξ.

4. Cela posé dérivons l'équation (6_b) par rapport à y.

$\bar{y}$ étant une valeur de y pour laquelle $f(y)$ est continue, on aura

$$-\psi(\bar{y})\frac{1}{\bar{y}^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} + \int\limits_0^{\bar{y}} \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{-\frac{1}{2}\bar{y}+\frac{3}{2}\xi-\varepsilon\xi}{(\bar{y}-\varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}\right\}d\xi = 0.$$

Ajoutons cette équation à l'équation $(6'_{\rm II})$ après l'avoir multipliée par $\frac{3}{2}-\varepsilon$. On trouvera

$$-\psi(\bar y)\frac{1}{\bar y^{\frac32}(1-\varepsilon)^{\frac32}}+\int_0^{\bar y}\psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\bar y(1-\varepsilon)}{(\bar y-\varepsilon\xi)^{\frac52}}\,d\xi=0,$$

d'où

$$\frac{1}{\bar y^{\frac52}(1-\varepsilon)^{\frac52}}\psi(\bar y)=\int_0^{\bar y}\psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{(\bar y-\varepsilon\xi)^{\frac52}}\,d\xi. \tag{8}$$

L'expression $\int_0^{y}\psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac52}}\,d\xi$ est une fonction continue de la variable y pour toute valeur y comprise entre 0 et 1. Donc en vertu de la relation (8) on pourra rendre continue la fonction $\psi(y)$ en changeant ses valeurs dans les points de discontinuité. On ne pourra avoir d'exception que pour la valeur $y=0$.

De même, à cause des relations (7_c) et (2), $\chi(1-\xi)$ et $\rho(1-\xi)$ deviendront des fonctions continues (excepté tout au plus pour $\xi=0$) en changeant leurs valeurs dans les points de discontinuité. Par suite, en prenant garde à ce que nous avons remarqué au 1er §, nous pouvons supposer que $\rho(1-\xi)$, $\chi(1-\xi)$ et $\psi(\xi)$ soient des fonctions continues. Tout au plus elles pourraient n'avoir pas une valeur déterminée pour $\xi=0$.

5. La fonction $\frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac52}}$ croît lorsqu'on fait croître ξ entre 0 et y; par conséquent $\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac52}}$ est positive. C'est pourquoi

$$\int_0^{y}\psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac52}}\,d\xi=\psi_1\int_0^{y}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac52}}\,d\xi=\psi_1\frac{1-(1-\varepsilon)^{\frac52}}{y^{\frac52}(1-\varepsilon)^{\frac52}}$$

en désignant par ψ_1 une valeur comprise entre la limite supérieure et la limite inférieure des valeurs de $\psi(\xi)$, ξ étant comprise entre 0 et y.

L'équation (8) deviendra donc

$$\psi(y) = \psi_1 \left(1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}} \right).$$

Il est facile de démontrer que cette équation ne peut être vérifiée que si les valeurs $\psi(y)$ sont nulles.

En effet, si $\psi(y)$ n'est pas nul, on tire de l'équation précédente

$$\frac{\psi(y)}{\psi_1} = 1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}}.$$

Le second membre étant positif, on peut remplacer $\psi(y)$ et ψ_1 par leurs valeurs absolues, et l'on a

$$\frac{|\psi(y)|}{|\psi_1|} = 1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}}.$$

Soit M la limite supérieure des valeurs absolues de $\psi(y)$, y étant comprise entre 0 et 1.

On aura

$$\frac{|\psi(y)|}{M} \leqq 1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}}.$$

Mais $\psi(y)$ peut s'approcher de M autant que l'on veut, de sorte que le premier membre étant proche de l'unité autant que l'on veut, l'équation précédente est absurde.

6. $\psi(\xi)$ étant nul, on tire de l'équation (7_c)

$$\chi(1 - \xi)\xi^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\int_0^{\xi} \chi(1 - \xi)\xi^{\frac{1}{2}}\, d\xi.$$

χ est donc une fonction dérivable par rapport à ξ pour $0 < \xi < 1$. Par la dérivation on trouve

$$\chi'(1 - \xi) = 0$$

d'où l'on déduit que χ et ρ sont constantes. Cette condition est incompatible avec l'hétérogénéité de l'ellipsoïde, et cela démontre que lorsque l'ellipsoïde est un ellipsoïde hétérogène de révolution, par rapport à l'axe de rotation, l'équilibre n'est pas possible.

III.

1. Envisageons maintenant le cas où $a \lessgtr b$. En posant $r^2 = x^2 + y^2$, on aura, à cause de l'équation (2) du 1er Article,

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\left(\frac{r^2}{b^2} - h + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$y^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}\left(\frac{r^2}{a^2} - h + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

et par suite, en vertu de la formule (3),

$$(1) \qquad \mu = 1 - \frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} r^2 - \frac{a^2 b^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} h - \left(\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)}\right)\frac{z^2}{c^2}.$$

Dérivons maintenant la relation (A) par rapport à z^2. On trouvera, à cause de l'équation précédente,

$$(2) \qquad \int_0^\infty \varphi'(\mu)\frac{d\lambda}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)}\right) = 0.$$

Supposons que c ne soit pas la plus petite des trois quantités a, b, c. Puisque λ est une quantité positive, on aurait

$$\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} > \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)},$$

c'est à dire

$$\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)} > 0.$$

Tous les facteurs qui paraissent sous la dernière intégrale seraient donc des quantités positives et par suite l'équation (2) ne serait pas possible. Il faut donc que c soit plus petite que a et b. L'ellipsoïde sera à trois axes inégaux, et l'on pourra arranger les trois quantités a, b, c par ordre de grandeur en écrivant

$$a > b > c.$$

2. Dérivons maintenant l'équation (A) par rapport à r^2. En prenant garde à l'équation (1) nous aurons

$$(3) \qquad \pi abc \int_0^\infty \varphi'(\mu) \frac{\lambda d\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\omega^2}{2}.$$

Posons

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = \xi.$$

En regardant λ comme une fonction de ξ, x^2, y^2, z^2, définie par l'équation précédente, on trouvera

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} = -\frac{1}{\Omega}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x^2} = \frac{1}{(a^2+\lambda)\Omega}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y^2} = \frac{1}{(b^2+\lambda)\Omega}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial z^2} = \frac{1}{(c^2+\lambda)\Omega}$$

où l'on suppose

$$\Omega = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}.$$

Pour calculer l'intégrale qui paraît dans l'équation (3), prenons ξ comme variable d'intégration au lieu de λ, nous aurons

$$(3') \qquad \int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi) \frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega} d\xi = \frac{\omega^2}{2}$$

étant

$$\chi(1-\xi) = \pi abc\varphi'(\mu).$$

Dérivons l'équation (3') par rapport à x^2, y^2, z^2. Puisque à la limite supérieure de l'intégrale on a $\lambda = 0$, nous trouverons

$$(4) \qquad \int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial H}{\partial x^2} d\xi = 0, \qquad \int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial H}{\partial y^2} d\xi = 0,$$

$$\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial H}{\partial z^2} d\xi = 0,$$

ayant posé

$$H = \frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}.$$

Or, on trouve par des calculs très-simples,

$$\frac{\partial H}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\Omega},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\Omega},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\Omega}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\Omega}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\Omega}.$$

C'est pourquoi les équations (4) s'écriront, par des intégrations par parties,

$$(4_1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\right)d\xi = 0, \\[2ex] \displaystyle\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\right)d\xi = 0, \\[2ex] \displaystyle\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\Omega}\right)d\xi = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$f(\xi) = -\chi(1-\xi)\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}\int_0^{\xi}\chi(1-\xi)\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\Omega}\,d\xi.$$

3. Supposons maintenant $y = z = 0$, et posons

$$\frac{x^2}{a^2} = u\,,\quad \varepsilon_1 = \frac{a^2-b^2}{a^2}\,,\quad \varepsilon_2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}.$$

Il viendra

$$\lambda = a^2\frac{u-\xi}{\xi}, \qquad a^2+\lambda = a^2\frac{u}{\xi}, \qquad b^2+\lambda = a^2\frac{u-\varepsilon_1\xi}{\xi}, \qquad c^2+\lambda = a^2\frac{u-\varepsilon_2\xi}{\xi},$$

$$\Omega = \frac{\xi^2}{a^2 u},$$

et les équations (4_1) s'écriront

$$(4') \qquad \int_0^u \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{u-\xi}{(u-\varepsilon_1\xi)^{\frac{3}{2}}(u-\varepsilon_2\xi)^{\frac{1}{2}}}\right]d\xi = 0,$$

$$(4'') \qquad \int_0^u \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{u-\xi}{(u-\varepsilon_1\xi)^{\frac{5}{2}}(u-\varepsilon_2\xi)^{\frac{1}{2}}}\right]d\xi = 0,$$

$$(4''') \qquad \int_0^u \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{u-\xi}{(u-\varepsilon_1\xi)^{\frac{3}{2}}(u-\varepsilon_2\xi)^{\frac{3}{2}}}\right]d\xi = 0,$$

où

$$(5) \qquad \psi(\xi) = -\chi(1-\xi)\xi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\int_0^\xi \chi(1-\xi)\xi^{\frac{1}{2}}d\xi.$$

Dérivons $(4')$ par rapport à u.

$\bar{u}$ étant un point de continuité de ψ, on aura

$$0 = -\psi(\bar{u})\frac{1}{\bar{u}^2(1-\varepsilon_1)^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\int_0^{\bar{u}}\chi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{(\bar{u}-\varepsilon_1\xi)^{\frac{3}{2}}(\bar{u}-\varepsilon_2\xi)^{\frac{1}{2}}}-\frac{3}{2}\frac{\bar{u}-\xi}{(\bar{u}-\varepsilon_1\xi)^{\frac{5}{2}}(\bar{u}-\varepsilon_2\xi)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\frac{\bar{u}-\xi}{(\bar{u}-\varepsilon_1\xi)^{\frac{3}{2}}(\bar{u}-\varepsilon_2\xi)^{\frac{3}{2}}}\right]d\xi.$$

Ajoutons $(4'')$ et $(4''')$ après avoir multiplié par $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$ respectivement. On obtiendra

$$(6) \qquad \psi(\bar{u})\frac{1}{\bar{u}^2(1-\varepsilon_1)^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\bar{u}}\psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{(\bar{u}-\varepsilon_1\xi)^{\frac{3}{2}}(\bar{u}-\varepsilon_2\xi)^{\frac{1}{2}}}\right]d\xi.$$

En répétant la discussion que nous avons faite dans l'Art. précédant, on trouve qu'on peut toujours supposer que les fontions $\chi(1-\xi)$, $\rho(1-\xi)$, $\psi(\xi)$ soient continues pour $0<\xi<1$.

Or $\dfrac{1}{(u-\varepsilon_1\xi)^{\frac{3}{2}}(u-\varepsilon_2\xi)^{\frac{1}{2}}}$ est une fonction croissante par rapport à ξ, étant $0\leq\xi\leq u$; par suite l'équation (6) s'écrira

$$\psi(u)\frac{1}{u^2(1-\varepsilon_1)^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}}=\psi'_1\int_0^{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{(u-\varepsilon_1\xi)^{\frac{3}{2}}(u-\varepsilon_2\xi)^{\frac{1}{2}}}\right]d\xi,$$

où ψ'_1 est une valeur comprise entre la limite supérieure et la limite inférieure des valeurs de $\psi(\xi)$, étant $0<\xi<u$.

On tire de là

$$\psi(u)=\psi_1\left(1-(1-\varepsilon_1)^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Il n'y a maintenant qu'à répéter les considérations faites à la fin de l'Art. II pour voir que $\psi(u)=0$, et par suite ρ est une quantité constante.

Donc, même si l'ellipsoïde est à trois axes inégaux l'équilibre n'est pas possible lorsqu'il est hétérogène.

Note Ière.

On peut montrer d'une manière très-simple que les raisonnements qu'on fait dans le cas de l'ellipsoïde discontinu, c'est à dire formé par un nombre fini de couches homogènes de densités différentes superposées les unes aux autres, ne peuvent pas s'appliquer, en général, au cas de l'ellipsoïde continu. Pour cela nous allons donner une démonstration directe, fort-simple, de la proposition qu'un ellipsoïde discontinu formé par n couches homogènes limitées par des ellipsoïdes homothétiques et concentriques, ne peut pas être en équilibre lorsqu'il tourne avec une vitesse constante autour d'une axe. On verra tout de suite que cette démonstration élémentaire ne peut pas s'étendre au cas où le nombre des couches augmente indéfiniment jusqu'à former un ellipsoïde continu.

On peut réduire le cas général où l'on a n couches au cas où l'ellipsoïde n'est formé que de deux couches. En effet supposons qu'il y ait équilibre pour l'ellipsoïde à n couches. Il y aura toujours équilibre en retranchant un nombre quelconque de couches extérieures, car ces couches n'exercent aucune attraction à l'intérieur.

Il y aura donc équilibre si l'ellipsoïde est réduit aux deux couches les plus internes ou même au noyau central. Mais le noyau étant en équilibre, l'équilibre subsisterait même si les deux couches avaient la même densité du noyau. Il faudrait donc que la fonction potentielle d'une masse remplissant la couche extérieure avec une densité égale à la différence des densités des deux couches fût constante sur la surface externe. Or cela est contraire aux propriétés de la fonction potentielle des couches ellipsoïdiques.

Note IIème.

Lorsqu'on suppose que la densité, à partir d'une certaine profondeur jusqu'au centre de l'ellipsoïde, va toujours en croissant ou en décroissant, alors les développements analytiques que nous avons donnés auparavant ne sont plus nécessaires pour la démonstration. Par des calculs très-simples on peut arriver au but. On peut même l'atteindre sans recourir à des calculs, mais par une discussion élémentaire.

En effet il suffit de remarquer que la masse fluide se maintient en équilibre en retranchant toute la partie extérieure et en gardant seulement celle renfermée à l'intérieur d'un ellipsoïde E concentrique et homothétique à l'ellipsoïde primitif, où la densité croît ou décroît toujours du centre jusqu'à la périphérie.

Cela posé décomposons cette masse M, par un ellipsoïde homothétique et concentrique E' en deux parties. Celle interne M' se maintient d'elle-même en équilibre par la rotation ω. Or on voit tout de suite qu'en prenant une masse M'' homothétique à M' de sorte que M' et M'' aient la même densité aux points qui se correspondent par homothétie, cette masse sera en équilibre en tournant avec la même vitesse angulaire ω autour de l'axe qui correspond par homothétie à l'axe de rotation M'. Si nous prenons maintenant M'' de manière qu'elle occupe l'espace renfermé

dans un ellipsoïde E' égal à E, nous aurons les deux masses M et M'' qui sont renfermées à l'intérieur de deux ellipsoïdes égaux et sont en équilibre en tournant avec la même vitesse angulaire autour de deux axes correspondants.

Si nous prenons une troisième ellipsoïde E'' égale à E et à E' et y renfermons une masse M''' dont la densité en chaque point soit la différence des densités correspondantes de M et de M', cette masse sera en équilibre d'elle-même étant en repos. Or la masse M''' a en tout point une densité positive, c'est pourquoi on voit aisément que l'équilibre n'est pas possible.

Note IIIème.

Je vais exposer une nouvelle démonstration de l'incompatibilité de l'équilibre d'une masse tournant uniformément, avec sa stratification par ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Je dirai après pourquoi je ne l'ai pas préférée à celle que j'ai donnée dans le cours du travail précédent.

Partons de l'équation (A) (Art. Ier) qu'on peut écrire

$$V = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \psi(h),$$

d'où l'on tire

$$\text{(B)} \qquad \Delta^2 V = -2\omega^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial h^2}\Delta h + \frac{\partial\psi}{\partial h}\Delta^2 h,$$

étant

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2.$$

Or par le théorème de Poisson

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho(h),$$

et à cause de l'équation (2) du 1er Article

$$\Delta h = 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right),$$

$$\Delta^2 h = -2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Donc, afin que l'équation (B) soit satisfaite, il faut que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} = 0$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation (B), que la densité doit être constante.

Cette démonstration est très-simple; mais elle suppose que le théorème de Poisson soit vérifié et pour cela il ne suffit pas que la densité soit une fonction intégrable. C'est pourquoi nous avons préféré la démonstration que nous avons donnée précédemment, quoique plus compliquée, à celle que nous venons d'exposer.

Cependant il faut remarquer qu'en suivant cette voie, on peut arriver à une conclusion plus générale.

En effet, par cette méthode, on peut démontrer le théorème suivant: *Soit une masse fluide d'une forme et d'une constitution quelconque, pourvu que la densité soit telle que le théorème de Poisson soit applicable. Si dans le domaine d'un point où le fluide est hétérogène et continu, les surfaces où la densité a des valeurs constantes sont des parties de quadriques homothétiques et concentriques, ou des parties de quadriques homofocales, la masse fluide ne sera pas en équilibre si elle tourne uniformément autour d'un axe quelconque.*

Note IVème.

Nous avons supposé dans le 1er § que la rotation de l'ellipsoïde eût lieu autour de l'un des axes. Il est aisé de prouver que cette hypothèse n'est pas une restriction, car si l'axe de rotation aurait pour équation

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

α, β, γ étant les cosinus de direction de l'axe, il faudrait remplacer dans l'équation (A), le terme $-\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ par

$$-\frac{\omega^2}{2}\{(x-x_0)^2(\beta^2+\gamma^2)+(y-y_0)^2(\gamma^2+\alpha^2)+(z-z_0)^2(\alpha^2+\beta^2)$$
$$-2(y-y_0)(z-z_0)\beta\gamma-2(z-z_0)(x-x_0)\gamma\alpha-2(x-x_0)(y-y_0)\alpha\beta\}.$$

Or puisque le premier membre de l'équation (A) et $\psi(h)$ ne changent pas, en changeant le signe des quantités x, y, z, il faut que l'on ait

$$\frac{x_0}{\alpha}=\frac{y_0}{\beta}=\frac{x_0}{\gamma}$$

et que deux des cosinus α, β, γ soient nuls.

BEWEIS EINES SATZES VON ABEL ÜBER DIE GLEICHUNG $x^n + y^n + z^n = 0$

VON

P. STÄCKEL

in KIEL.

Dass ABEL sich mit der Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$ beschäftigt hat, zeigt ein Brief von ihm an HOLMBOE aus dem August 1823 (Oeuvres, Nouv. éd. t. II. S. 254—255). Ein darauf bezüglicher Satz, den er in dem Briefe mitteilt, ohne anzugeben, wie er ihn hergeleitet hatte, soll in dem Folgenden bewiesen werden.

Wenn n eine positive ungerade Zahl bedeutet, so ist $u^n + v^n$ durch $u + v$ algebraisch teilbar, und da der Quotient in u und v symmetrisch ist, lässt er sich als ganze rationale Function von $u + v$ und uv darstellen, es besteht also eine Identität der Form:

$$\frac{u^n + v^n}{u + v} = A_0(u + v)^{n-1} + A_1 uv . (u + v)^{n-3} + A_2(uv)^2 . (u + v)^{n-5} + \dots$$
$$\dots + A_{\frac{n-3}{2}}(uv)^{\frac{n-3}{2}} . (u + v)^2 + A_{\frac{n-1}{2}}(uv)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Im Besonderen ist der letzte Coefficient

$$A_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . n,$$

wie man sofort erkennt, indem man $u = t + x$, $v = -t$ setzt und dann zur Grenze für $x = 0$ übergeht. Mithin gilt die Congruenz:

$$\frac{u^n + v^n}{u + v} \equiv (-1)^{\frac{n-1}{2}} . n(uv)^{\frac{n-1}{2}} \pmod{(u + v)^2}.$$

Bezeichnen nunmehr x, y, z von Null verschiedene, positive oder negative ganze Zahlen, die paarweise relativ prim sind, und besteht zwischen ihnen die Gleichung:

$$x^n + y^n + z^n = 0,$$

in der n eine ungerade Primzahl bedeuten soll, so ergiebt sich mittels der soeben bewiesenen Formel die Congruenz:

$$\frac{x^n}{y+z} \equiv (-1)^{\frac{n+1}{2}} . n(yz)^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{mod. } (y+z)^2),$$

bei der die linke Seite eine ganze Zahl ist.

Man zerlege $y + z$ in Primfactoren. Es sei p eine Primzahl, die in $y + z$ genau k mal enthalten ist. Da sich x^n durch $y + z$ teilen lässt, so muss p auch Primfactor von x sein, und ist p in x genau α mal enthalten, so muss

$$k \leqq \alpha n$$

sein.

Ist $k < \alpha n$, so enthält der Quotient $\frac{x^n}{y+z}$ noch den Primfactor p, folglich ist auch $n(yz)^{\frac{n-1}{2}}$ durch p teilbar. Wenn aber y und z relativ prim sind, so gilt dasselbe von $y + z$ und yz, mithin muss n durch p teilbar und daher $p = n$ sein. Demnach kann die Annahme $k < \alpha n$ nur dann erfüllt sein, wenn $y + z$ durch n teilbar ist. Dann ist es yz nicht, und daher, zufolge der Congruenz, der Quotient $\frac{x^n}{y+z}$ nur durch n selbst, aber durch keine höhere Potenz von n teilbar, also

$$k = \alpha n - 1.$$

Hieraus ergiebt sich, dass für $p \gtrless n$ notwendig

$$k = \alpha n$$

ist und dass nur folgende zwei Möglichkeiten vorhanden sind:

Erstens: Es ist $y + z$ nicht durch n teilbar. Dann lässt es sich als n^{te} Potenz einer ganzen Zahl u darstellen:

$$y + z = u^n,$$

und es wird gleichzeitig

$$x = u . u',$$

wo die ganzen Zahlen u und u' relativ prim sind. *Zweitens:* Es ist $y + z$ durch n teilbar, dann lässt es sich in der Form darstellen:

$$y + z = n^{n-1}u^n,$$

und es wird gleichzeitig

$$x = nu \, . \, u',$$

wo nu und u' relativ prim sind.

Entsprechende Gleichungen gelten, wenn y oder z bevorzugt wird. Es ist also entweder gleichzeitig

$$z + x = v^n \quad \text{und} \quad y = v \, . \, v',$$

wo v und v' relativ prim sind, oder

$$z + x = n^{n-1}v^n \quad \text{und} \quad y = nv \, . \, v',$$

wo nv und v' relativ prim sind, und entweder gleichzeitig

$$x + y = w^n \quad \text{und} \quad z = w \, . \, w',$$

wo w und w' relativ prim sind, oder

$$x + y = n^{n-1}w^n \quad \text{und} \quad z = nw \, . \, w',$$

wo nw und w' relativ prim sind.

Da die Zahlen x, y, z paarweise relativ prim sein sollten, kann höchstens eine von ihnen durch n teilbar sein, und es ergeben sich daher durch Combination der Möglichkeiten nur *zwei* wesentlich verschiedene Fälle. Entweder ist keine der Zahlen $y + z$, $z + x$, $x + y$ durch n teilbar und daher

$$y + z = u^n, \qquad z + x = v^n, \qquad x + y = w^n,$$

oder es ist eine von ihnen durch n teilbar, während es die anderen nicht sind. Da alle drei Zahlen x, y, z in der Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = 0$$

dieselbe Rolle spielen, darf man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass $y + z$ durch n teilbar sei, und erhält dann die Gleichungen:

$$y + z = n^{n-1}u^n, \qquad z + x = v^n, \qquad x + y = w^n.$$

Auf diese Weise ergiebt sich schliesslich ein Satz, der mit dem von ABEL angegebenen im Wesentlichen identisch ist und folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Sind x, y, z von Null verschiedene, positive oder negative ganze Zahlen, die paarweise relativ prim sind, und besteht für sie die Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = 0,$$

in der n eine ungerade Primzahl bedeutet, so sind nur zwei Fälle möglich. *Erstens:* x, y, z lassen sich in je zwei teilerfremde Factoren zerlegen:

$$x = u.u', \qquad y = v.v', \qquad z = w.w',$$

wo u, v, w nicht durch n teilbar sind, in der Weise, dass gleichzeitig:

$$x = \frac{-u^n + v^n + w^n}{2}, \qquad y = \frac{u^n - v^n + w^n}{2}, \qquad z = \frac{u^n + v^n - w^n}{2}$$

ist. *Zweitens:* x, y, z lassen sich in je zwei teilerfremde Factoren zerlegen:

$$x = nu.u', \qquad y = v.v', \qquad z = w.w',$$

wo v und w nicht durch n teilbar sind, in der Weise, dass gleichzeitig:

$$x = \frac{-n^{n-1}u^n + v^n + w^n}{2}, \qquad y = \frac{n^{n-1}u^n - v^n + w^n}{2}, \qquad z = \frac{n^{n-1}u^n + v^n - w^n}{2}$$

ist, oder es gelten die durch Vertauschung von x, y, z mit einander hervorgehenden Relationen.

SUR UN PROBLÈME D'INVERSION RÉSOLU PAR ABEL

PAR

E. GOURSAT

À PARIS.

En cherchant à déterminer une courbe située dans un plan vertical, de telle façon que le temps mis par un mobile λ, soumis à l'action de la pesanteur et assujetti à se mouvoir sur cette courbe, pour parvenir d'un point de départ quelconque D à un point donné A, soit une fonction donnée $\varphi(a)$ de la hauteur verticale a de la chute, ABEL a été conduit à résoudre une équation qui peut s'écrire

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{f(x)dx}{\sqrt{a-x}}, \tag{1}$$

où $f(x)$ est la fonction à déterminer. En réfléchissant à la méthode employée pour résoudre cette équation et l'équation plus générale

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{f(x)dx}{(a-x)^n}, \tag{2}$$

où n est un exposant positif quelconque inférieur à l'unité, il m'a semblé que la marche suivie par ABEL devenait presque intuitive, en rattachant le problème à une certaine intégrale double.

1. La fonction $\varphi(a)$ étant donnée, pour déterminer la fonction $f(x)$ au moyen de l'équation (2), admettons d'abord que cette fonction $f(x)$

peut être représentée par une expression analogue à celle de $\varphi(a)$, et posons

$$(3) \qquad f(x) = \int_0^x \frac{\psi(y)\,dy}{(x-y)^{n'}},$$

n' étant un nouvel exposant positif inférieur à l'unité, et $\psi(y)$ une nouvelle fonction inconnue. La formule (2) peut s'écrire, en posant $x = ax'$,

$$\varphi(a) = \int_0^1 a^{1-n} \frac{f(ax')\,dx'}{(1-x')^n},$$

et de la formule (3) on tire

$$f(ax') = \int_0^{ax'} \frac{\psi(y)\,dy}{(ax'-y)^{n'}},$$

ou encore, en posant $y = ay'$,

$$f(ax') = a^{1-n'} \int_0^{x'} \frac{\psi(ay')\,dy'}{(x'-y')^{n'}},$$

et la valeur de $\varphi(a)$ devient, en remplaçant $f(ax')$ par cette expression,

$$(4) \qquad \varphi(a) = a^{2-n-n'} \int_0^1 \frac{dx'}{(1-x')^n} \int_0^{x'} \frac{\psi(ay')\,dy'}{(x'-y')^{n'}}.$$

Mais le second membre de cette égalité n'est autre chose que l'intégrale double de la fonction

$$\frac{a^{2-n-n'}\psi(ay')}{(1-x')^n(x'-y')^{n'}}$$

étendue à l'aire du triangle formé par les droites $y' = 0$, $y' = x'$, $x' = 1$. En intervertissant l'ordre des intégrations, on a donc aussi

$$\varphi(a) = a^{2-n-n'} \int_0^1 \psi(ay')\,dy' \int_{y'}^1 \frac{dx'}{(1-x')^n(x'-y')^{n'}};$$

or la première intégration nous donne, en posant $x' = y' + (1 - y')t$,

$$\int_{y'}^{1} \frac{dx'}{(1-x')^{n}(x'-y')^{n'}} = (1-y')^{1-n-n'} \int_{0}^{1} t^{-n'}(1-t)^{-n} dt$$
$$= \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(1-n')}{\Gamma(2-n-n')}(1-y')^{1-n-n'},$$

et par suite

$$\varphi(a) = \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(1-n')}{\Gamma(2-n-n')} \int_{0}^{1} a^{2-n-n'}(1-y')^{1-n-n'} \psi(ay')dy';$$

en revenant à la variable $y = ay'$, on a encore

$$(5) \qquad \varphi(a) = \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(1-n')}{\Gamma(2-n-n')} \int_{0}^{a} (a-y)^{1-n-n'} \psi(y)dy.$$

On satisfait facilement à cette condition en prenant pour l'exposant n', qui est resté indéterminé jusqu'ici, la valeur $1 - n$, ce qui donne

$$(6) \qquad \varphi(a) = \Gamma(n)\Gamma(1-n)\int_{0}^{a} \psi(y)dy = \frac{\pi}{\sin n\pi}\int_{0}^{a} \psi(y)dy;$$

on ne peut trouver de fonction $\psi(y)$ vérifiant la relation précédente que si la fonction $\varphi(a)$ est nulle pour $a = 0$, et, s'il en est ainsi, on a immédiatement, en prenaut les dérivées par rapport à la variable a,

$$(7) \qquad \psi(a) = \frac{\sin n\pi}{\pi}\varphi'(a),$$

et la fonction inconnue $f(x)$ a pour expression

$$(8) \qquad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_{0}^{x} \frac{\varphi'(y)dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

2. Cette expression de $f(x)$ n'est valable que si la fonction $\varphi(a)$ est nulle pour $a = 0$. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, la fonction $f(x)$ ne peut être continue pour $x = 0$, comme le montre immédiatement la formule (1). Dans ce cas, nous prendrons pour $f(x)$ une expression de la forme

$$(9) \qquad f(x) = \frac{1}{x}\int_{0}^{x} \frac{\psi(y)dy}{(x-y)^{1-n}};$$

par une suite de transformations tout-à-fait pareilles aux précédentes, on trouve que $\varphi(a)$ peut s'écrire

$$(10) \qquad \varphi(a) = \int_0^1 \psi(ay')dy' \int_{y'}^1 \frac{dx'}{x'(1-x')^n(x'-y')^{1-n}}.$$

La première intégrale peut être calculée, car si si l'on pose

$$x' = \frac{y'}{1+(y'-1)t},$$

elle devient

$$\frac{1}{y'^{1-n}} \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-n}(1-t)^n} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-n)}{y'^{1-n}} = \frac{\pi}{\sin n\pi} y'^{n-1},$$

et la formule qui donne $\varphi(a)$ devient

$$(11) \qquad \varphi(a) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \int_0^1 \frac{\psi(ay')dy'}{y'^{1-n}},$$

ou, en revenant à la variable $y = ay'$,

$$(12) \qquad a^n \varphi(a) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \int_0^a \frac{\psi(y)}{y^{1-n}} dy.$$

Les deux membres de l'égalité (12) s'annullent pour $a = 0$; il suffira donc que leurs dérivées soient égales, ce qui donne

$$\psi(a) = [a\varphi'(a) + n\varphi(a)] \frac{\sin n\pi}{\pi}$$

et l'expression cherchée de $f(x)$ est

$$(13) \qquad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi x} \int_0^x \frac{y\varphi'(y) + n\varphi(y)}{(x-y)^{1-n}} dy.$$

Cette expression de $f(x)$ coïncide avec la première lorsque $\varphi(0) = 0$, car on peut l'écrire

$$\frac{\sin n\pi}{\pi x}\int_0^x \frac{(y-x)\varphi'(y)+n\varphi(y)}{(x-y)^{1-n}}dy + \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi'(y)dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

La première partie est égale à

$$-\frac{\sin n\pi}{\pi x}[(x-y)^n\varphi(y)]_0^x = \frac{\sin n\pi}{\pi x}x^n\varphi(0) = \frac{\sin n\pi}{\pi}\frac{\varphi(0)}{x^{1-n}},$$

et la formule (13) prend la forme plus simple

$$(14) \qquad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi}\frac{\varphi(0)}{x^{1-n}} + \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi'(y)dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

3. Pour vérifier l'identité de la solution précédente avec la solution d'Abel, remarquons qu'en posant $y = tx$ l'expression (13) de $f(x)$ devient

$$f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{x^n t\varphi'(xt) + nx^{n-1}\varphi(xt)}{(1-t)^{1-n}}dt,$$

et le second membre est la dérivée par rapport à x de l'intégrale

$$\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{x^n\varphi(xt)dt}{(1-t)^{1-n}} = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

Si donc on pose $ds = f(x)dx$, la formule (13) conduit à la formule même d'Abel

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

ON A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS LEADING TO PERIODIC FUNCTIONS

BY

H. F. BAKER

of CAMBRIDGE (Engl.).

The present paper contains an elementary algebraic deduction of a system of differential equations satisfied by all the hyperelliptic sigma functions which, as is believed, were first stated, but without demonstration, in the Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. IX, Part IX, 1898, p. 513. In that note will be found indications of a method of solution of the equations in connexion with the theory, considered by PICARD, of integrals of total differentials, and of a method of obtaining from them the expansion of any sigma function, and of their use, in case $p = 2$, for expressing the geometry of KUMMER's sixteen nodal quartic surface. The establishment of a theory of the sigma functions directly from these differential equations would appear likely to be of the greatest suggestiveness for the development of the theory of functions of several variables. It is from this general point of view that the equations appear to the present writer to be of peculiar interest; though their simplicity would also recommend them merely as a contribution to the theory of the hyperelliptic functions.

I.

Let $(x_1 y_1) \dots (x_p y_p)$ be pairs satisfying the equation

$$y^2 = f(x) = 4P(x)Q(x),$$

where

$$P(x) = (x - a_1) \dots (x - a_p), \qquad Q(x) = (x - c_1) \dots (x - c_p)(x - c);$$

let

$$F(x) = (x - x_1) \dots (x - x_p), \qquad F'(x) = \frac{d}{dx} F(x),$$

and, $e_1, e_2, e_3, \dots$ being undetermined quantities, let

$$\Delta_i = \sum_{r=1}^{p} \frac{y_r}{(e_i - x_r)F'(x_r)}, \qquad \Delta_{ij} = -\frac{\Delta_i - \Delta_j}{e_i - e_j},$$

so that

$$(e_2 - e_3)\Delta_{23} + (e_3 - e_1)\Delta_{31} + (e_1 - e_2)\Delta_{12} = 0$$

$$(e_2 - e_3)(e_4 - e_1)\Delta_{23}\Delta_{41} + (e_3 - e_1)(e_4 - e_2)\Delta_{31}\Delta_{42} + (e_1 - e_2)(e_4 - e_3)\Delta_{12}\Delta_{43} = 0;$$

put further

$$\frac{f(e_i)}{[F(e_i)]^2} = \varphi_i$$

and

$$\Omega_{ij} = (e_i - e_j)^2 \Delta_{ij}^2 - \varphi_i - \varphi_j;$$

also let

$$\chi_{p-i}(x) = x^{p-i} - h_1 x^{p-i-1} + h_2 x^{p-i-2} - \dots + (-1)^{p-i} h_{p-i},$$

so that

$$\frac{F(x)}{x - x_i} = x^{p-1} + x^{p-2}\chi_1(x_i) + x^{p-3}\chi_2(x_i) + \dots + \chi_{p-1}(x_i),$$

h_r being the sum of the homogeneous products of $x_1 \dots x_p$, without repetitions, r together.

We assume in this paper that $u_1 \dots u_p$ are arbitrary variables, and that the pairs $(x_1 y_1) \dots (x_p y_p)$ are determined from them by the p equations

$$\int_{m_1}^{x_1} \frac{x^{r-1}dx}{y} + \dots + \int_{m_p}^{x_p} \frac{x^{r-1}dx}{y} = u_r, \qquad {\scriptstyle r=1,\dots,p}$$

where the lower limits denote p pairs satisfying the equation $y^2 = f(x)$, to be chosen arbitrarily and kept the same throughout the following investigation. It is further assumed that any rational symmetric function of the pairs $(x_1 y_1) \dots (x_p y_p)$ is a single valued analytic function of $u_1 \dots u_p$. Such a function has in fact no essential singularities for finite values of $u_1 \dots u_p$.

It is proved at once that

$$dx_i = \sum_{r=1}^{p} \left[\frac{y_i}{F'(x_i)} \chi_{p-r}(x_i) \right] du_r,$$

and therefore

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_r} = \frac{y_i}{F'(x_i)} \chi_{p-r}(x_i), \qquad \frac{\partial y_i}{\partial u_r} = \frac{1}{2} \frac{f'(x_i)}{F'(x_i)} \chi_{p-r}(x_i);$$

we put further

$$\sum_{r=1}^{p} e_i^{r-1} \frac{\partial}{\partial u_r} = \delta_i.$$

Now consider the expression

$$H = \frac{1}{4} F^2(e_1) F^2(e_2) \Delta_{12}^2 - \frac{F(e_1)P(e_2) - F(e_2)P(e_1)}{e_1 - e_2} \cdot \frac{F(e_1)Q(e_2) - F(e_2)Q(e_1)}{e_1 - e_2};$$

it is easily seen to vanish when e_1 is replaced by x_1; it is therefore an integral polynomial in e_1 and e_2 dividing identically by $F(e_1)F(e_2)$.

Take a symmetrical system of $\frac{1}{2}p(p+1)$ constants $c_{\lambda\mu}$, of arbitrary values, and put

$$f(e_1, e_2) = 4[P(e_1)Q(e_2) + P(e_2)Q(e_1)] - 4(e_1 - e_2)^2 \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} c_{\lambda\mu} e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1},$$

so that the expression

$$f(e_1, e_2) + 4(e_1 - e_2)^2 \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} c_{\lambda\mu} e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1} - \frac{f(e_1)F(e_2)}{F(e_1)} - \frac{f(e_2)F(e_1)}{F(e_2)}$$

is equal to

$$-\frac{4[F(e_1)P(e_2)-F(e_2)P(e_1)][F(e_1)Q(e_2)-F(e_2)Q(e_1)]}{F(e_1)F(e_2)};$$

then the quantity

$$\Phi=\frac{H}{F(e_1)F(e_2)}-\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}c_{\lambda\mu}e_1^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}$$

is equal to

$$\frac{1}{4}F(e_1)F(e_2)\Delta_{12}^2+\frac{1}{4(e_1-e_2)^2}\left[f(e_1, e_2)-f(e_1)\frac{F(e_2)}{F(e_1)}-f(e_2)\frac{F(e_1)}{F(e_2)}\right],$$

which is therefore a rational symmetric polynomial in e_1 and e_2, of degree $(p-1)$ in each, of which the coefficients are rational symmetric functions of the p pairs $(x_1y_1)\ldots(x_py_p)$.

We may therefore define $\frac{1}{2}p(p+1)$ single-valued analytic functions of the variables $u_1\ldots u_p$, without essential singularity for finite values of these variables, by putting

$$\Phi=\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_1^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}.$$

These functions depend on the $\frac{1}{2}p(p+1)$ arbitrary constants $c_{\lambda\mu}$, but only additively; and they depend on the p arbitrary fixed places denoted above by $m_1\ldots m_p$, of which the alteration is equivalent only to the addition of constants to the arguments $u_1\ldots u_p$; moreover they satisfy the equations

$$\wp_{\lambda\mu}(u)=\wp_{\mu\lambda}(u).$$

We shall put

$$\wp_{\lambda\mu\nu}(u)=\frac{\partial\wp_{\lambda\mu}(u)}{\partial u_\nu},\qquad \wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)=\frac{\partial\wp_{\lambda\mu\nu}(u)}{\partial u_\rho},$$

and it will be found to be an incidental consequence of the following work that in all the functions $\wp_{\lambda\mu\nu}(u)$, $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$, the order of the suffixes is indifferent, or $\wp_{\lambda\mu\nu}(u)=\wp_{\lambda\nu\mu}(u)$; etc.

The definition of the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$ is equivalent with

$$4(e_1-e_2)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)\,.\,e_1^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}-f(e_1, e_2)=F(e_1)F(e_2)\Omega_{12},$$

where, as before,

$$\Omega_{12} = (e_1 - e_2)^2 \Delta_{12}^2 - \varphi_1 - \varphi_2.$$

To this equation we apply the operator

$$\partial_3 = \sum_{\nu=1}^{p} e_3^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial u_\nu}.$$

Recalling the values of $\partial x_i | \partial u_r$ and $\partial y_i | \partial u_r$ we find easily

$$\frac{1}{F(e_3)} \partial_3 F(e_1) = - F(e_1) \Delta_{13}, \qquad \frac{1}{F(e_3)} \partial_3 \varphi_1 = 2\varphi_1 \Delta_{13};$$

with some calculation, of which the details are given below, we find

$$\frac{1}{F(e_3)} \partial_3 \Delta_{12} = \frac{1}{2} \frac{(e_1 - e_3)\Delta_{13}^2 - (e_2 - e_3)\Delta_{23}^2}{e_1 - e_2}$$

$$+ \frac{\varphi_1}{2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} + \frac{\varphi_2}{2(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)} + \frac{\varphi_3}{2(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)},$$

which gives

$$\frac{1}{F(e_1)F(e_2)F(e_3)} \partial_3 [\Omega_{12} F(e_1) F(e_2)]$$

$$= (e_1 - e_2)\Delta_{12} \left[(e_1 - e_3)\Delta_{13}^2 - (e_2 - e_3)\Delta_{23}^2 + (e_1 - e_2) \sum^{1,2,3} \frac{\varphi_1}{2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \right]$$

$$- 2\varphi_1 \Delta_{13} - 2\varphi_2 \Delta_{23} - (\Delta_{13} + \Delta_{23})[(e_1 - e_2)^2 \Delta_{12}^2 - \varphi_1 - \varphi_2],$$

and in virtue of

$$(e_2 - e_3)\Delta_{23} + (e_3 - e_1)\Delta_{31} + (e_1 - e_2)\Delta_{12} = 0$$

this reduces to

$$- \frac{\partial_3 [\Omega_{12} F(e_1) F(e_2)]}{(e_1 - e_2)^2 F(e_1) F(e_2) F(e_3)}$$

$$= \Delta_{23}\Delta_{31}\Delta_{12} + \frac{(e_2 - e_3)\varphi_1 \Delta_{23} + (e_3 - e_1)\varphi_2 \Delta_{31} + (e_1 - e_2)\varphi_3 \Delta_{12}}{\varpi_{123}}$$

where

$$\varpi_{123} = (e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2).$$

We thus deduce that the expression

$$- \frac{4}{F(e_1)F(e_2)F(e_3)} \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} \wp_{\lambda\mu\nu}(u) e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1} e_3^{\nu-1}$$

is, for all values of e_1, e_2, e_3, equal to the expression on the right side of the last written equation. As this is symmetrical in e_1, e_2, e_3 it follows that in $\wp_{\lambda\mu\nu}(u)$ the order of the suffixes is indifferent. It is not possible to express the functions $\wp_{\lambda\mu\nu}(u)$ rationally in terms of the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$; it is a consequence of what follows that the squares and products

$$\wp^2_{\lambda\mu\nu}(u), \; \wp_{\lambda\mu\nu}(u)\wp_{\rho\sigma\tau}(u)$$

can be so expressed. We proceed therefore to further apply the operator

$$\partial_4 = \sum_{\rho=1}^{p} e_4^{\rho-1} \frac{\partial}{\partial u_\rho}$$

to obtain the expressions for $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$.

Before doing this we give the calculation referred to above to find the expression for

$$\frac{1}{F(e_3)} \partial_3 \Delta_{13}$$

we have

$$\frac{\partial}{\partial u_r}\left[\frac{y_k}{F'(x_k)}\right] = \frac{1}{2}\frac{f'(x_k)}{[F'(x_k)]^2}\chi_{p-r}(x_k) - \frac{y_k}{[F'(x_k)]^2}\frac{\partial}{\partial u_r}[F'(x_k)]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{f'(x_k)}{[F'(x_k)]^2}\chi_{p-r}(x_k) - \frac{y_k}{F'(x_k)}\left\{\frac{y_k}{F'(x_k)}\chi_{p-r}(x_k)\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{1}{x_k - x_i}\right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{y_i}{F'(x_i)}\chi_{p-r}(x_i)\frac{1}{x_k - x_i}\right\},$$

where $\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}$ is a summation from which the term for $i = k$ is omitted, so that

$$\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{1}{x_k - x_i} = \frac{1}{2}\frac{F''(x_k)}{F'(x_k)};$$

therefore

$$\frac{\partial}{\partial u_r}\left[\frac{y_k}{F'(x_k)}\right] = \frac{1}{2}\frac{f'(x_k)}{[F'(x_k)]^2}\chi_{p-r}(x_k) - \frac{1}{2}\frac{f(x_k)F''(x_k)}{[F'(x_k)]^3}\chi_{p-r}(x_k)$$

$$+ \frac{y_k}{F'(x_k)}\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{y_i}{F'(x_i)}\frac{\chi_{p-r}(x_i)}{x_k - x_i};$$

hence

$$\frac{1}{F(e_3)}\partial_3\left[\frac{y_k}{F'(x_k)}\right] = \frac{1}{2}\frac{f'(x_k)F'(x_k) - f(x_k)F''(x_k)}{(e_3 - x_k)[F'(x_k)]^2} + \frac{y_k}{F'(x_k)}\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{y_i}{(e_3 - x_i)(x_k - x_i)F'(x_i)},$$

while

$$\partial_3\frac{y_k}{(e_1 - x_k)F'(x_k)} = \frac{f(x_k)F(e_3)}{(e_1 - x_k)^2(e_3 - x_k)[F'(x_k)]^2} + \frac{1}{e_1 - x_k}\partial_3\left[\frac{y_k}{F'(x_k)}\right];$$

wherefore

$$\frac{1}{F(e_3)}\partial_3\Delta_1 = \frac{1}{F(e_3)}\sum_{k=1}^{p}\partial_3\left[\frac{y_k}{(e_1 - x_k)F'(x_k)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{1}{2}\frac{f'(x_k)F'(x_k) - f(x_k)F''(x_k)}{(e_3 - x_k)(e_1 - x_k)[F'(x_k)]^2} + \frac{f(x_k)}{(e - x_k)^2(e_3 - x_k)[F'(x_k)]^2}\right\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p}\frac{y_k}{(e_1 - x_k)F'(x_k)}\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{y_i}{(e_3 - x_i)(x_k - x_i)F'(x_i)};$$

herein the second term of the right side, arising in a form consisting of $p(p-1)$ terms, is in fact a sum of $\frac{1}{2}p(p-1)$ terms, namely equal to

$$\sum_{k,i}^{1\dots p}\sum\frac{y_k y_i}{(e_1 - x_k)(e_3 - x_k)F'(x_k)(e_1 - x_i)(e_3 - x_i)F'(x_i)}\cdot\frac{(e_3 - x_k)(e_1 - x_i) - (e_3 - x_i)(e_1 - x_k)}{x_k - x_i}$$

wherein $k \neq i$, and therefore equal to

$$\sum_{k,i}^{1\dots p}\sum\frac{(e_3 - e_1)y_k y_i}{(e_3 - x_k)(e_1 - x_k)F'(x_k)(e_3 - x_i)(e_1 - x_i)F'(x_i)}$$

or

$$\frac{1}{2}(e_3 - e_1)\left\{\left[\sum_{k=1}^{p}\frac{y_k}{(e_3 - x_k)(e_1 - x_k)F'(x_k)}\right]^2 - \sum_{k=1}^{p}\frac{f(x_k)}{(e_3 - x_k)^2(e_1 - x_k)^2[F'(x_k)]^2}\right\}.$$

Thus

$$\frac{1}{F(e_3)}\partial_3\Delta_1 = \frac{1}{2}(e_3 - e_1)\Delta_{13}^2$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{f'(x_k)F'(x_k) - f(x_k)F''(x_k)}{(e_3 - x_k)(e_1 - x_k)[F'(x_k)]^2} + \frac{(e_3 + e_1 - 2x_k)f(x_k)}{(e_3 - x_k)^2(e_1 - x_k)^2[F'(x_k)]^2}\right\}$$

which is the same as

$$\frac{1}{2}(e_3 - e_1)\Delta_{13}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{F'(x_k)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{f(x_k)}{(e_3 - x_k)(e_1 - x_k)F'(x_k)}\right].$$

This gives

$$\frac{1}{F(e_3)}\partial_3 \Delta_{12} = \frac{1}{2}\frac{(e_1 - e_3)\Delta_{13}^2 - (e_2 - e_3)\Delta_{23}^2}{e_1 - e_2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{F'(x_k)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{f(x_k)}{(e_1 - x_k)(e_2 - x_k)(e_3 - x_k)F'(x_k)}\right];$$

now if $R(x)$ be a rational function of x not becoming infinite or zero for $x = x_k$, it is easy to prove that the coefficient of $(x - x_k)^{-1}$ in the expansion of $R(x) | [F(x)]^2$ is equal to

$$\frac{1}{F'(x_k)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{R(x_k)}{F'(x_k)}\right];$$

thus, applying the well known partial fraction theorem

$$\left[\frac{f(x)}{(e_1 - x)(e_2 - x)(e_3 - x)[F(x)]^2}\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

we find, finally, as stated above, that

$$\frac{1}{F(e_3)}\partial_3 \Delta_{12} = \frac{1}{2}\frac{(e_1 - e_3)\Delta_{13}^2 - (e_2 - e_3)\Delta_{23}^2}{e_1 - e_2} + \frac{1}{2}\sum^{1,2,3}\frac{\varphi_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}.$$

Proceeding now to apply the operator

$$\partial_4 = \sum_{\rho=1}^{p} e_4^{\rho-1}\frac{\partial}{\partial u_\rho}$$

to the equation before proved

$$-\frac{4}{F(e_1)F(e_2)F(e_3)}\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} \wp_{\lambda\mu\nu}(u) \,.\, e_1^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}e_3^{\nu-1}$$

$$= \Delta_{23}\Delta_{31}\Delta_{12} + \frac{1}{\varpi_{123}}\sum^{1,2,3} \varphi_1(e_2 - e_3)\Delta_{23},$$

we have at once, by use of the equations

$$\partial_4 F(e_i) = - F(e_4)F(e_i)\Delta_{i4}, \qquad \partial_4\varphi_i = 2F(e_4)\varphi_i\Delta_{i4}$$

$$\partial_4 \Delta_{12} = \frac{1}{2}F(e_4)\left\{\frac{(e_1 - e_4)\Delta_{14}^2 - (e_2 - e_4)\Delta_{24}^2}{e_1 - e_2} - \frac{1}{\varpi_{124}}\sum^{1,2,4} \varphi_1(e_2 - e_4)\right\}$$

the result that

$$-\frac{4}{F(e_1)F(e_2)F(e_3)F(e_4)}\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\rho=1}^{p}\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)e_1^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}e_3^{\nu-1}e_4^{\rho-1}$$

is equal to

$$-(\Delta_{14}+\Delta_{24}+\Delta_{34})\Big[\Delta_{23}\Delta_{31}\Delta_{12}+\frac{1}{\varpi_{123}}\sum^{1,2,3}\varphi_1(e_2-e_3)\Delta_{23}\Big]+\frac{2}{\varpi_{123}}\sum^{1,2,3}\varphi_1(e_2-e_3)\Delta_{23}\Delta_{14}$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\Delta_{12}\Delta_{13}+\frac{1}{\varpi_{123}}\varphi_1(e_2-e_3)\Big]\Big[\frac{(e_2-e_4)\Delta_{24}^2-(e_3-e_4)\Delta_{34}^2}{e_2-e_3}-\frac{1}{\varpi_{234}}\sum^{2,3,4}(e_2-e_3)\varphi_4\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\Delta_{23}\Delta_{21}+\frac{1}{\varpi_{123}}\varphi_2(e_3-e_1)\Big]\Big[\frac{(e_3-e_4)\Delta_{34}^2-(e_1-e_4)\Delta_{14}^2}{e_3-e_1}-\frac{1}{\varpi_{314}}\sum^{3,1,4}(e_3-e_1)\varphi_4\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\Delta_{31}\Delta_{32}+\frac{1}{\varpi_{123}}\varphi_3(e_1-e_2)\Big]\Big[\frac{(e_1-e_4)\Delta_{14}^2-(e_2-e_4)\Delta_{24}^2}{e_1-e_2}-\frac{1}{\varpi_{124}}\sum^{1,2,4}(e_1-e_2)\varphi_4\Big];$$

by means of the identity

$$(e_j-e_k)\Delta_{jk}+(e_k-e_i)\Delta_{ki}+(e_i-e_j)\Delta_{ij}=0$$

the right side, multiplied by -2, reduces to

$$\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{42}\Delta_{43}+\Delta_{23}\Delta_{21}\Delta_{43}\Delta_{41}+\Delta_{31}\Delta_{32}\Delta_{41}\Delta_{42}$$

$$-\sum^{1,2,3,4}\varphi_h\Big[\frac{\Delta_{ij}\Delta_{ik}}{(e_h-e_j)(e_h-e_k)}+\frac{\Delta_{jk}\Delta_{ji}}{(e_h-e_k)(e_h-e_i)}+\frac{\Delta_{ki}\Delta_{kj}}{(e_h-e_i)(e_h-e_j)}\Big]$$

$$+\sum^{1,2,3,4}\frac{\varphi_h\varphi_i+\varphi_j\varphi_k}{(e_i-e_j)(e_i-e_k)(e_h-e_j)(e_h-e_k)}.$$

If now we put

$$M=(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)(e_4-e_1)(e_4-e_2)(e_4-e_3),\qquad \lambda_{ij}=(e_i-e_j)^2\Delta_{ij}^2$$

and use the identities

$$\sum^{1,2,3,4}(e_2-e_3)(e_4-e_1)\Delta_{23}\Delta_{41}=0,\qquad \sum^{1,2,3}(e_2-e_3)\Delta_{23}=0,$$

we find that the expression above, multiplied by M, can be written as the sum of three expressions of the form

$$(e_2-e_3)(e_4-e_1)[\lambda_{23}\lambda_{41}-\lambda_{23}(\varphi\cdot+\varphi_4)-\lambda_{41}(\varphi_2+\varphi_3)-(\varphi_2\varphi_3+\varphi_4\varphi_1)]$$

which is equal to

$$(e_2-e_3)(e_4-e_1)\Big[(\lambda_{23}-\varphi_2-\varphi_3)(\lambda_{41}-\varphi_4-\varphi_1)-\sum^{1,2,3}(\varphi_2\varphi_3+\varphi_4\varphi_1)\Big];$$

thus, with

$$\Omega_{ij}=\lambda_{ij}-\varphi_i-\varphi_j,$$

we finally have the formula

$$8(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)(e_4-e_1)(e_4-e_2)(e_4-e_3)\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\rho=1}^{p}\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)\,.\,e_1^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}e_3^{\nu-1}e_4^{\rho-1}$$

$$=(e_2-e_3)(e_4-e_1)\Big[f(e_2,e_3)-4(e_2-e_3)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_2^{\lambda-1}e_3^{\mu-1}\Big]\cdot$$

$$\Big[f(e_4,e_1)-4(e_4-e_1)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_4^{\lambda-1}e_1^{\mu-1}\Big]$$

$$+(e_3-e_1)(e_4-e_2)\Big[f(e_3,e_1)-4(e_3-e_1)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_3^{\lambda-1}e_1^{\mu-1}\Big]$$

$$\Big[f(e_4,e_2)-4(e_4-e_2)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_4^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}\Big]$$

$$+(e_1-e_2)(e_4-e_3)\Big[f(e_1,e_2)-4(e_1-e_2)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_1^{\lambda-1}e_1^{\mu-1}\Big]$$

$$\Big[f(e_4,e_3)-4(e_4-e_3)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_4^{\lambda-1}e_3^{\mu-1}\Big]$$

which, to save repetitions, we shall refer to as the fundamental formula. It is clear from it that the functions $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$ have values independent of the order of the suffixes λ,μ,ν,ρ. It is also clear that the arbitrariness in the lower limits of the integrals by which $x_1\ldots x_p$ were initially determined from $u_1\ldots u_p$, equivalent as it is only to arbitrary additive constants for the arguments $u_1\ldots u_p$, is of no importance, and that, similarly, the arbitrariness of the coefficients $c_{\lambda\mu}$ in the definition of the polynomial $f(x,z)$, cancelled as it is by corresponding arbitrary additive constants for the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$, is of no importance.

The above work has been carried out on the hypothesis that the hyperelliptic equation $y^2=f(x)$ has no term in x^{2p+2}. By putting

$$x=\frac{A}{\xi-a},\qquad x_i=\frac{A}{\xi_i-a},\qquad e_i=\frac{A}{\varepsilon_i-a},\qquad \eta=\frac{(\xi-a)^{p+1}}{H}y,$$

where A and α are arbitrary, and, with λ_{2p+2} arbitrary,

$$H^2 = -4a_1 \ldots a_p c_1 \ldots c_p c \mid \lambda_{2p+2},$$

we easily find the corresponding results for an equation

$$\eta^2 = \lambda_{2p+2}(\xi - \alpha)(\xi - \alpha_1) \ldots (\xi - \alpha_p)(\xi - \gamma)(\xi - \gamma_1) \ldots (\xi - \gamma_p);$$

I have carried through the work, which, though long, is not difficult. It will be sufficient to state the result, which may therefore be reckoned equivalent with the former, or can be directly proved in the same way.

Let

$$y^2 = \lambda_{2p+2} P(x) Q(x) = f(x)$$

where

$$P(x) = (x - a)(x - a_1) \ldots (x - a_p), \qquad Q(x) = (x - c)(x - c_1) \ldots (x - c_p);$$

let $u_1 \ldots u_p$ be arbitrary variables, and $x_1 \ldots x_p$ be thence determined by means of

$$\sum_{k=1}^{p} \int_{m_k}^{x_k} \frac{x^{r-1} dx}{y} = u_r, \qquad r=1 \ldots p$$

and put

$$R(x) = (x - a)(x - x_1) \ldots (x - x_p), \qquad \Phi(x) = f(x) \mid [R(x)]^2,$$

$$\nabla_{12} = \sum_{k=1}^{p} \frac{y_k}{(e_1 - x_k)(e_2 - x_k) R'(x_k)};$$

further, taking $\frac{1}{2}p(p+1)$ arbitrary constant coefficients $c_{\lambda\mu}$, define, for undetermined quantities e_1, e_2, the function $f(e_1, e_2)$ by means of

$$f(e_1, e_2) = \lambda_{2p+2}[P(e_1) Q(e_2) + P(e_2) Q(e_1)] - 4(e_1 - e_2)^2 \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} c_{\lambda\mu} e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1};$$

then, if we define $\frac{1}{2}p(p+1)$ functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$ by means of the equation

$$\frac{4(e_1 - e_2)^2 \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} \wp_{\lambda\mu}(u) e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1} - f(e_1, e_2)}{R(e_1) R(e_2)} = (e_1 - e_2)^2 \nabla_{12}^2 - \Phi(e_1) - \Phi(e_2),$$

we shall arrive at an equation having precisely the same form as the previously deduced fundamental formula.

This second equation being regarded as deducible from the former by the transformation suggested, the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$ occurring in it are not identical with but linear functions of the former.

It is easy to see, as is well known, that the polynomial $f(x, z)$ satisfies the two conditions (1) of being a rational polynomial in x and z, of degree $p+1$ in each, and symmetrical in regard to them, (2) of reducing to $2f(x)$ when $z=x$, (3) of being such that

$$\left[\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}\right]_{z=x} = \frac{df(x)}{dx},$$

the condition (3) being a consequence of (1) and (2); and that conversely any expression satisfying these is included in our form above by suitably choosing the constants $c_{\lambda\mu}$. This is so whether $f(x)$ is of order $2p+2$ or $2p+1$. If we write $f(x)$ symbolically in the form a_x^{2p+2}, one possible form for $f(x, z)$, considered by Prof. KLEIN, is $2a_x^{p+1}a_z^{p+1}$. Another form (suggested by an identity due to ABEL, see the present writer's *Abelian Functions*, p. 195) though not invariantive, appears to possess great simplicity for purposes of calculation, namely putting $f(x) = \sum_0^{2p+2} \lambda_r x^r$ we may take $f(x, z) = \sum_{i=0}^{p+1} x^i z^i [2\lambda_{2i} + \lambda_{2i+1}(x+z)]$, with $\lambda_{2p+3} = 0$. It will save repetitions to refer to this as ABEL's form for $f(x, z)$.

If we suppose $\lambda_{2p+2} = 0$, $\lambda_{2p+1} = 4$, and take this form for $f(x, z)$, the equations which express $(x_1 y_1) \ldots (x_p y_p)$ in terms of $u_1 \ldots u_p$ are given at once in a simple form by the formulae above. From the definition formula for the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$, dividing by e_2^{p+1}, putting $e_2 = \infty$, and then $e_1 = x_i$, we find that $x_1 \ldots x_p$ are the roots of the equation

$$x^p - x^{p-1}\wp_{pp}(u) - x^{p-2}\wp_{p,p-1}(u) - \ldots - \wp_{p,1}(u) = 0;$$

while, taking the formula

$$-4 \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} \wp_{\lambda\mu\nu}(u) e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1} e_3^{\nu-1}$$

$$= F(e_1)F(e_2)F(e_3)\left[\Delta_{23}\Delta_{31}\Delta_{12} + \frac{\sum^{1,2,3} \varphi_1(e_2 - e_3)\Delta_{23}}{\varpi_{123}}\right],$$

we obtain, for the right side, after dividing by e_3^{p-1} and putting $e_3 = \infty$, the value

$$-4F(e_1)F(e_2)\Delta_{12};$$

if we now divide by e_2^{p-1} and put $e_2 = \infty$, and afterwards put $e_1 = x_i$, we find that

$$y_i = x_i^{p-1}\wp_{ppp}(u) + x_i^{p-2}\wp_{p,p,p-1}(u) + \ldots + \wp_{pp1}(u).$$

The fact we have proved, that $\wp_{\lambda\mu\nu}(u) = \wp_{\lambda\nu\mu}(u)$, shews that

$$\wp_{\lambda 1}(u)du_1 + \ldots + \wp_{\lambda p}(u)du_p, \quad = -d\zeta_\lambda(u), \text{ say,}$$

is a perfect differential; in the present order of development the study of the character of the functions $\zeta_\lambda(u)$ is subsequent to that of the differential equations. From

$$\frac{\partial\zeta_\lambda(u)}{\partial u_\mu} = -\wp_{\lambda\mu}(u) = \frac{\partial\zeta_\mu(u)}{\partial u_\lambda}$$

follows that

$$\zeta_1(u)du_1 + \ldots + \zeta_p(u)du_p$$

is also a perfect differential. If we write it equal to $d\log\sigma(u)$ it will be found that the differential equations naturally suggest the consideration of $\sigma(u)$ as a dependent variable, and that they are satisfied by the hypothesis that $\sigma(u)$ is an integral function.

Note. The formula for the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$ which is made the basis of this paper was first given by BOLZA, Gött. Nachr., 1894, p. 270. A deduction from the theory of algebraic integrals was given by him, Amer. J. of Math., XVII (1895), and, independently, by the present writer (*Abel. Functions,* Cambridge, 1897, p. 329); see also BAKER, *On the hyperelliptic sigma functions,* Amer. J. of Math., XX, 1898, p. 378, and Math. Annal., L, 1898, p. 462. For the equations of this paper, without demonstration, but with indications of their application, see Camb. Phil. Proc., Vol. IX, Pt. IX, p. 513, September 1898. The expression for the functions $\zeta_\lambda(u)$ in terms of algebraic integrals are given in the writers *Abelian Functions* (pp. 321 and 195). The present development is complete in itself, and requires no previous study of the associated RIEMANN surface, if the simple case of JACOBI's theorem of inversion which is utilised be assumed. But, if we allow the formula which expresses a theta function of any characteristic, not necessarily half-integral, by the addition of certain constants (parts of the period system) to the arguments of a theta function with zero characteristic, we see that the equations are satisfied by sigma functions of quite arbitrary characteristic.

II.

We consider now, as next in logical order, the algebraic problem of forming the explicit differential equations from the fundamental formula above established, obtaining them by way of example for $p = 2$ and $p = 3$. The method followed can be regarded only as provisional. Not only is the question how far some of these equations are deducible from the others left unconsidered; but the isobaric character of the equations, remarked below, which promises a general rule for writing down the equations for any value of p, remains not utilised. The present deduction has however great simplicity and some algebraic interest.

The following notation is employed:

The quantities before denoted by e_1, e_2, e_3, e_4 are denoted respectively by x, y, z, t, and so

$$M = (y-z)(z-x)(x-y)(t-x)(t-y)(t-z);$$

a summation extending to these four letters is denoted by S; so that for instance

$$S(y-z)^2(t-x)^2 = (y-z)^2(t-x)^2 + (z-x)^2(t-y)^2 + (x-y)^2(t-z)^2;$$

further we denote the symmetric function $S(x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta)$ by $(\alpha\beta\gamma\delta)$, and the sum of the homogeneous products of x, y, z, t, including repetitions, α together, by H_α, so that for instance $H_2 = Sx^2 + Syz$ or $H_2 = (2000) + (1100)$; and we denote by $|\alpha\beta\gamma\delta|$ the determinant

$$|\alpha\beta\gamma\delta| = \begin{vmatrix} H_\alpha & H_\beta & H_\gamma & H_\delta \\ H_{\alpha-1} & H_{\beta-1} & H_{\gamma-1} & H_{\delta-1} \\ H_{\alpha-2} & H_{\beta-2} & H_{\gamma-2} & H_{\delta-2} \\ H_{\alpha-3} & H_{\beta-3} & H_{\gamma-3} & H_{\delta-3} \end{vmatrix},$$

where $H_0 = 1$ and, when n is negative, $H_n = 0$; similarly in what follows quantities usually arising with positive suffixes are to be put zero when the general rules would give negative suffixes;

we shall need to consider the coefficients $(\alpha\beta)$ arising in the product

$$\Phi_1(x\,,y) = (x - y)\,\Phi(x\,,y) = (x - y)\sum_{\alpha=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = -\sum_{\alpha=0}^{N+1}\sum_{\beta=0}^{N+1}(\alpha\beta)x^\alpha y^\beta,$$

wherein $\Phi(x\,,y)$ is any rational polynomial symmetric in x and y so that $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, and

$$(\alpha\beta) = a_{\alpha,\beta-1} - a_{\alpha-1,\beta},$$

for which $(\alpha\beta) = -(\beta\alpha)$, $(\alpha\beta) = 0$; and shall meet with the Pfaffian forms

$$\{\alpha\beta\gamma\delta\} = (\alpha\beta)(\gamma\delta) - (\alpha\gamma)(\beta\delta) + (\alpha\delta)(\beta\gamma);$$

it is easy to see that when the polynomial $\Phi(x\,,y)$ is the Abelian form

$$\sum_{i=0}^{p+1} x^i y^i[2\lambda_{2i} + \lambda_{2i+1}(x + y)]$$

all the quantities $(\alpha\beta)$ are zero in which the difference of α and β is not 1 or 2, and that

$$(\alpha\,,\alpha + 1) = 2\lambda_{2\alpha}, \qquad (\alpha\,,\alpha + 2) = \lambda_{2\alpha+1};$$

similarly from two such rational symmetric polynomials

$$\Phi(xy) = \sum_{\alpha=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \qquad \Phi'(x\,,y) = \sum_{\alpha=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N} a'_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$$

we shall form the quantities

$$\{\alpha\beta\gamma'\delta'\} = (\alpha\beta)(\gamma'\delta') - (\alpha\gamma)(\beta'\delta') + (\alpha\delta)(\beta'\gamma') + (\gamma\delta)(\alpha'\beta') - (\beta\delta)(\alpha'\gamma') + (\beta\gamma)(\alpha'\delta')$$

reducing, when $a'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$, to $2\{\alpha\beta\gamma\delta\}$; in particular when the first polynomial is the Abelian form above and the second is

$$(x - y)^2\sum_{\alpha=0}^{p-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}\wp_{\alpha+1,\beta+1}x^\alpha y^\beta,$$

that is

$$\sum_{\alpha=0}^{p+1}\sum_{\beta=0}^{p+1}(\wp_{\alpha-1,\beta+1} - 2\wp_{\alpha,\beta} + \wp_{\alpha+1,\beta-1})x^\alpha y^\beta,$$

then $(\alpha\beta)$ is as before and

$$(\alpha'\beta') = -(\wp_{\alpha-2,\beta+1} - 3\wp_{\alpha-1,\beta} + 3\wp_{\alpha,\beta-1} - \wp_{\alpha+1,\beta-2}),$$

functions $\wp_{\lambda\mu}$ with negative suffixes being, as explained above, put zero.

The forms just explained arise naturally in the problem of expressing the quotient

$$-\frac{1}{M} S(y-z)(t-x)\,\Phi(y\,,z)\,\Phi(t\,,x),$$

which is an integral symmetric polynomial in $x\,,y\,,z\,,t$; it is equal to

$$\frac{1}{M}\left[\Phi_1(x\,,y)\Phi_1(z\,,t)-\Phi_1(x\,,z)\Phi_1(y\,,t)+\Phi_1(x\,,t)\Phi_1(y\,,z)\right],$$

and contains the term

$$\frac{1}{M} x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta\{\alpha\beta\gamma\delta\},$$

and is therefore equal to the sum, for all combinations four together of the unequal numbers $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta$ chosen from the set $0\ldots(N+1)$, of the expressions

$$\frac{1}{M}\begin{vmatrix} x^\alpha & x^\beta & x^\gamma & x^\delta \\ y^\alpha & y^\beta & y^\gamma & y^\delta \\ z^\alpha & z^\beta & z^\gamma & z^\delta \\ t^\alpha & t^\beta & t^\gamma & t^\delta \end{vmatrix}\{\alpha\beta\gamma\delta\},$$

that is, as is well known, of the expressions

$$|\alpha\beta\gamma\delta|\{\alpha\beta\gamma\delta\}.$$

In precisely the same way the expression

$$-\frac{1}{M} S(y-z)(t-x)[\Phi(y\,,z)\Phi'(t\,,x)+\Phi(t\,,x)\Phi'(y\,,z)]$$

is equal to the sum of all possible expressions arising of the form

$$|\alpha\beta\gamma\delta|\{\alpha\beta\gamma'\delta'\}.$$

Returning now to our differential equations, and writing for brevity $f_{12}=f(x\,,y)$, etc., the suffixes $1\,,2\,,3\,,4$ being respectively associated with $x\,,y\,,z\,,t$, and $f(x\,,y)$ denoting as before a rational polynomial symmetrical in $x\,,y$, of degree $p+1$ in each, for which $f(x\,,x)=2f(x)$, and writing further

$$P_{12}=\sum_{\alpha=0}^{p-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}\wp_{\alpha+1,\beta+1}x^\alpha y^\beta,$$

the differential equations can be put into the form

$$8\sum_{\lambda,\mu,\nu,\rho}^{1\ldots p}(\lambda-1\,,\,\mu-1\,,\,\nu-1\,,\,\rho-1)\left[\wp_{\lambda\mu\nu\rho}-2(\wp_{\mu\lambda}\wp_{\rho\lambda}+\wp_{\nu\lambda}\wp_{\rho\mu}+\wp_{\lambda\mu}\wp_{\rho\nu})\right]$$

$$=\frac{1}{M}S(y-z)(t-x)f_{23}f_{41}-\frac{4}{M}S(y-z)(t-x)\left[f_{23}(t-x)^2P_{41}+f_{41}(y-z)^2P_{23}\right]$$

$$+\frac{16}{M}HS(y-z)(t-x)P_{23}P_{41}$$

wherein

$$H=\frac{1}{2}S(y-z)^2(t-x)^2=(2200)-(2110)+6(1111)$$

and the summation on the left extends to every combination of four of the numbers $\lambda-1\,,\,\mu-1\,,\,\nu-1\,,\,\rho-1$ from the set $0\ldots(p-1)$. We are to express the right side in terms of the symmetric functions $(\alpha\beta\gamma\delta)$ and equate coefficients of these on the two sides. The form of the fundamental formula here taken is recommended, not only by the simplicity of the right side, but also by the fact that if we put

$$\wp_{\lambda\mu}=-\frac{\partial^2}{\partial u_\lambda\partial u_\mu}\log\sigma(u),\qquad \sigma_i=\frac{\partial\sigma(u)}{\partial u_i},\qquad \sigma_{ij}=\frac{\partial^2\sigma(u)}{\partial u_i\partial u_j},\quad \text{etc.},$$

the expression

$$Q_{\lambda\mu\nu\rho}=\wp_{\lambda\mu\nu\rho}-2(\wp_{\mu\nu}\wp_{\lambda\rho}+\wp_{\nu\lambda}\wp_{\rho\mu}+\wp_{\lambda\mu}\wp_{\rho\nu})=-\frac{1}{\sigma^2}\{\sigma\sigma_{\lambda\mu\nu\rho}-\Sigma\sigma_\rho\sigma_{\lambda\mu\nu}+\Sigma\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\rho\lambda}\}\,,$$

involves only σ^2 in its denominator; when it is proved, as indeed follows from the differential equations, that $\sigma(u)$ is an integral function, it will be permissable to say that $Q_{\lambda\mu\nu\rho}$ is a function whose (unessential) singularities are such that $\sigma^2(u)\,Q_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$ is an integral function. We remark moreover that if

$$\Delta_\lambda=\frac{\partial}{\partial u_\lambda}-\frac{\partial}{\partial u'_\lambda},$$

then

$$\wp_{\lambda\mu}(u)=-\frac{1}{2\sigma^2(u)}\Delta_\lambda\Delta_\mu\sigma(u)\sigma(u'),$$

$$Q_{\lambda\mu\nu\rho}(u)=-\frac{1}{2\sigma^2(u)}\Delta_\lambda\Delta_\mu\Delta_\nu\Delta_\rho\sigma(u)\sigma(u'),$$

where, after differentiation, u'_λ is to be replaced by u_λ.

On consideration of the forms arising in the fundamental formula it is immediately clear that if we reckon $\wp_{\lambda\mu}(u)$ as of *weight* $\lambda+\mu$, $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$ as of weight $\lambda+\mu+\nu+\rho$, and, in

$$f(x\,,\,y)=\sum_0^{p+1}\sum_0^{p+1}a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta,$$

reckon $a_{\alpha\beta}$ as of weight $\alpha+\beta$, then the coefficient of the symmetric function $(\alpha\beta\gamma\delta)$ on each side of the formula is isobarically of weight $\alpha+\beta+\gamma+\delta+4$. Thus the expression to be obtained for $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$ is isobarically of weight $\lambda+\mu+\nu+\rho$; for instance the function $\wp_{1111}(u)$ can only contain terms of weight 4, and therefore, however great p may be, cannot have more than a limited number of terms. While further, the form of $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$ being obtained for any value of p, its form for any lower value, p_1, of p, is obtainable by the mere omission of coefficients $a_{\alpha\beta}$ which contain suffixes α or β greater then p_1+1 and of functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$ which contain suffixes λ or μ greater then p_1. As before terms to which the general rules give negative suffixes are throughout to be omitted.

We content ourselves here with forming the equations for $p=3$. In every form $|\alpha\beta\gamma\delta|$, or $\{\alpha\beta\gamma\delta\}$, we suppose $\alpha<\beta<\gamma<\delta$; the only forms $|\alpha\beta\gamma\delta|$ arising for $p=3$, with their values in terms of the symmetric functions $(\alpha\beta\gamma\delta)$, are

$$|0123|=1;\quad |0124|=(1000),\quad |0134|=(1100),$$
$$|0234|=(1110),\quad |1234|=(1111);$$
$$|0125|=(2000)+(1100),\qquad |0135|=(2100)+2(1110),$$
$$|0235|=(2110)+3(1111),\quad |0145|=(2200)+(2110)+2(1111)$$
$$|0245|=(2210)+2(2111),\quad |0345|=(2220)+(2211),$$
$$|1235|=(2111),\quad |1245|=(2211),\quad |1345|=(2221),\quad |2345|=(2222).$$

With the help of these equations we can arrange the expression

$$-\frac{1}{M}S(y-z)(t-x)f(y\,,\,z)f(t\,,\,x)=\Sigma\,|\alpha\beta\gamma\delta|\{\alpha\beta\gamma\delta\}$$

where

$$f(x\,,\,y)=\sum_0^4\sum_0^4 a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta,$$

in terms of the symmetric functions (0000) ... (2222); for the expression

$$-\frac{1}{M} S(y-z)(t-x) P_{23} P_{41} = \Sigma |\alpha\beta\gamma\delta| \{\alpha\beta\gamma\delta\}',$$

where

$$P_{12} = \sum_0^2 \sum_0^2 \wp_{\alpha+1,\beta+1} x^\alpha y^\beta,$$

only one term arises, namely

$$|0123| \{0123\}' = (01)'(23)' - (02)'(13)' + (03)'(12)',$$

wherein

$$(\alpha\beta)' = \wp_{\alpha+1,\beta} - \wp_{\alpha,\beta+1},$$

so that the term is equal to

$$-(\wp_{32}\wp_{12} - \wp_{31}\wp_{22} + \wp_{21}^2 - \wp_{23}\wp_{11})$$

which we shall denote by $-\Delta$.

For instance by equating the coefficients of (0112) on the two sides of the fundamental formula we obtain the equation

$$S\{\wp_{1223} - 4\wp_{12}\wp_{23} - 2\wp_{22}\wp_{13}\} = -\{0235\} - \{0145\}$$
$$+ 4\{023'5'\} + 4\{014'5'\} + 16\{0123\}';$$

it will be sufficient to denote the right side of the equation by

$$-\{0235\} - \{0145\} + 4\{..''\} - 16\Delta,$$

and so for the others, and the left side by [1223]. With these notations the set of equations is as follows, the left column giving the symmetrical function $(\alpha\beta\gamma\delta)$ of which the other terms in the same horizontal line are the coefficients: —

(2222); $[3333] = - \{2345\} + 4\{..''\}$

(2221); $[3332] = - \{1345\} + 4\{..''\}$

(2220); $[3331] = - \{0345\} + 4\{..''\}$

(2211); $[3322] = - \{0345\} - \{1245\} + 4\{..''\}$

(2210); $[3321] = - \{0245\} + 4\{..''\}$

$$(2200);\quad [3311] = -\{0145\} + 4\{..''\} + 16\Delta$$
$$(2111);\quad [3222] = -2\{0245\} - \{1235\} + 4\{..''\}$$
$$(2110);\quad [3221] = -\{0235\} - \{0145\} + 4\{..''\} - 16\Delta$$
$$(2100);\quad [3211] = -\{0135\} + 4\{..''\}$$
$$(2000);\quad [3111] = -\{0125\} + 4\{..''\}$$
$$(1111);\quad [2222] = -\{1234\} - 3\{0235\} - 2\{0145\} + 4\{..''\} + 96\Delta$$
$$(1110);\quad [2221] = -\{0234\} - 2\{0135\} + 4\{..''\}$$
$$(1100);\quad [2211] = -\{0134\} - \{0125\} + 4\{..''\}$$
$$(1000);\quad [2111] = -\{0124\} + 4\{..''\}$$
$$(0000);\quad [1111] = -\{0123\} + 4\{..''\}.$$

To calculate now explicit values for the quantities $\{\alpha\beta\gamma\delta\}$ we limit ourselves to the hypothesis that $f(x, y)$ is of the socalled Abelian form

$$f(x, y) = \sum_0^4 \sum_0^4 x^i y^i [2\lambda_{2i} + \lambda_{2i+1}(x+y)],$$

where $\lambda_9 = 0$, the corresponding results for other forms of $f(x, y)$ being obtainable by adding a suitable constant to each of the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$. Then with the equations, remarked before, $(\alpha, \alpha+1) = 2\lambda_{2\alpha}$, $(\alpha, \alpha+2) = \lambda_{2\alpha+1}$, we obtain, for the forms $\{\alpha\beta\gamma\delta\}$ which arise when $p = 3$,

$$\{0123\} = 4\lambda_0\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3;\quad \{0124\} = 2\lambda_0\lambda_5,\quad \{0134\} = 4\lambda_0\lambda_6,\quad \{0234\} = 2\lambda_1\lambda_6,$$
$$\{1234\} = 4\lambda_2\lambda_6 - \lambda_3\lambda_5;$$

$$\{0125\} = 0,\quad \{0135\} = 2\lambda_0\lambda_7,\quad \{0235\} = \lambda_1\lambda_7,\quad \{0145\} = 4\lambda_0\lambda_8,$$
$$\{0245\} = 2\lambda_1\lambda_8,\quad \{0345\} = 0,\quad \{1235\} = 2\lambda_2\lambda_7,\quad \{1245\} = 4\lambda_2\lambda_8,$$
$$\{1345\} = 2\lambda_3\lambda_8,\quad \{2345\} = 4\lambda_4\lambda_8 - \lambda_5\lambda_7.$$

To calculate the quantities $\{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\}$ we require the values of the quantities

$$(\alpha'\beta') = -(\wp_{\alpha-2,\beta+1} - 3\wp_{\alpha-1,\beta} + 3\wp_{\alpha,\beta-1} - \wp_{\alpha+1,\beta-2});$$

those which enter are found to be given by

$$\begin{array}{lllll}
(0'1')=0 & (0'2')=0 & (0'3')=\wp_{11} & (0'4')=\wp_{12} & (0'5')=\wp_{13} \\
 & (1'2')=-3\wp_{11} & (1'3')=-2\wp_{12} & (1'4')=\wp_{22}-3\wp_{13} & (1'5')=\wp_{23} \\
 & & (2'3')=4\wp_{13}-3\wp_{22} & (2'4')=-2\wp_{23} & (2'5')=\wp_{33} \\
 & & & (3'4')=-3\wp_{33} & (3'5')=0 \\
 & & & & (4'5')=0
\end{array}$$

From these we easily calculate the fifteen quantities $\{012'3'\}\ldots\{234'5'\}$; for instance

$$\begin{aligned}\{012'3'\} &= (01)(2'3')-(02)(1'3')+(03)(1'2')+(23)(0'1')-(13)(0'2')+(12)(0'3') \\ &= 2\lambda_0(4\wp_{13}-3\wp_{22})+2\lambda_1\wp_{12}+2\lambda_2\wp_{11}.\end{aligned}$$

When all these are substituted we find the following differential equations

$$\begin{aligned}
&\wp_{3333}-6\wp_{33}^2 &&= -\tfrac{1}{2}\lambda_4\lambda_8+\tfrac{1}{8}\lambda_5\lambda_7+\lambda_6\wp_{33}+\lambda_7\wp_{32}+\lambda_8(4\wp_{31}-3\wp_{22}) \\
&\wp_{3332}-6\wp_{23}\wp_{33} &&= -\tfrac{1}{4}\lambda_3\lambda_8 \quad +\lambda_6\wp_{32}+\tfrac{1}{2}\lambda_7(3\wp_{31}-\wp_{22})+2\lambda_8\wp_{21} \\
&\wp_{3331}-6\wp_{31}\wp_{33} &&= \lambda_6\wp_{31}-\tfrac{1}{2}\lambda_7\wp_{21}+\lambda_8\wp_{11} \\
&\wp_{3322}-4\wp_{32}^2-2\wp_{22}\wp_{33} &&= -\tfrac{1}{2}\lambda_2\lambda_8 \quad +\tfrac{1}{2}\lambda_5\wp_{32}+\lambda_6\wp_{31}-\tfrac{1}{2}\lambda_7\wp_{21}-2\lambda_8\wp_{11} \\
&\wp_{3321}-2\wp_{12}\wp_{33}-4\wp_{23}\wp_{13} &&= -\tfrac{1}{4}\lambda_1\lambda_8 \quad +\tfrac{1}{2}\lambda_5\wp_{31} \\
&\wp_{3311}-4\wp_{31}^2-2\wp_{11}\wp_{33} &&= -\tfrac{1}{2}\lambda_0\lambda_8+2\Delta \\
&\wp_{3222}-6\wp_{22}\wp_{23} &&= -\tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_8-\tfrac{1}{4}\lambda_2\lambda_7-\tfrac{1}{2}\lambda_3\wp_{33}+\lambda_4\wp_{32}+\lambda_5\wp_{31}-\tfrac{3}{2}\lambda_7\wp_{11} \\
&\wp_{3221}-4\wp_{12}\wp_{23}-2\wp_{22}\wp_{13} &&= -\tfrac{1}{8}\lambda_1\lambda_7-\tfrac{1}{2}\lambda_0\lambda_8+\lambda_4\wp_{31}-2\Delta \\
&\wp_{3211}-4\wp_{12}\wp_{13}-2\wp_{11}\wp_{23} &&= -\tfrac{1}{4}\lambda_0\lambda_7+\tfrac{1}{2}\lambda_3\wp_{31} \\
&\wp_{3111}-6\wp_{11}\wp_{31} &&= \lambda_0\wp_{33}-\tfrac{1}{2}\lambda_1\wp_{32}+\lambda_2\wp_{31}
\end{aligned}$$

$$\wp_{2222} - 6\wp_{22}^2 = -\frac{1}{2}\lambda_2\lambda_6 + \frac{1}{8}\lambda_3\lambda_5 - \frac{3}{8}\lambda_1\lambda_7 - \lambda_0\lambda_8 - 3\lambda_2\wp_{33} + \lambda_3\wp_{32} + \lambda_4\wp_{22} + \lambda_5\wp_{21} - 3\lambda_6\wp_{11} + 12\Delta$$

$$\wp_{2221} - 6\wp_{21}\wp_{22} = -\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_6 - \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_7 - \frac{3}{2}\lambda_1\wp_{33} + \lambda_3\wp_{31} + \lambda_4\wp_{21} - \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{11}$$

$$\wp_{2211} - 4\wp_{12}^2 - 2\wp_{22}\wp_{11} = -\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_6 - 2\lambda_0\wp_{33} - \frac{1}{2}\lambda_1\wp_{32} + \lambda_2\wp_{31} + \frac{1}{2}\lambda_3\wp_{21}$$

$$\wp_{2111} - 6\wp_{11}\wp_{12} = -\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_5 - 2\lambda_0\wp_{32} + \frac{1}{2}\lambda_1(3\wp_{31} - \wp_{22}) + \lambda_2\wp_{21}$$

$$\wp_{1111} - 6\wp_{11}^2 = -\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_4 + \frac{1}{8}\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0(4\wp_{31} - 3\wp_{22}) + \lambda_1\wp_{21} + \lambda_2\wp_{11}$$

wherein

$$\Delta = \wp_{32}\wp_{21} - \wp_{31}\wp_{22} + \wp_{31}^2 - \wp_{33}\wp_{11}.$$

Of these the last five equations give the proper equations for $p = 2$, by putting therein $\lambda_7 = \lambda_8 = 0$ and $\wp_{33} = \wp_{32} = \wp_{31} = 0$; while the last equation gives the proper equation for $p = 1$.

These equations put a *problem:* To obtain a theory of differential equations which shall shew from them why, if we assume

$$\wp_{\lambda\mu}(u) = -\partial^2 \log \sigma(u) \,|\, \partial u_\lambda \partial u_\mu,$$

the function $\sigma(u)$ has the properties which *a priori* we know it to possess, and how far the forms of the equations are essential to these properties. It must suffice for the present to have stated the problem.

Cambridge (Engl.), 14 February, 1902.

[15 August. In illustration of the remarks as to weight (p. 152), it may be added that the equation given above for $\wp_{1111}$ is true for any value of p, and that the equations for the preceding four functions $\wp_{2111}$, $\wp_{2211}$, $\wp_{2221}$, $\wp_{2222}$ are true for any value of p if we add to the right sides the respective terms,

for $\wp_{2111}$ the term $3\lambda_0\wp_{14}$, for $\wp_{2211}$ the terms $\lambda_0(2\wp_{15} + \wp_{24}) + \frac{3}{2}\lambda_1\wp_{14}$,

for $\wp_{2221}$ the terms

$$\lambda_0(\wp_{16} + 3\wp_{25} - 3\wp_{34}) + \lambda_1\left(\wp_{15} + \frac{3}{2}\wp_{24}\right) + \lambda_2\wp_{14},$$

and for $\wp_{2222}$ the terms

$$\lambda_0(4\wp_{26} - 3\wp_{44}) + \lambda_1(4\wp_{25} - 3\wp_{34}) + 4\lambda_2\wp_{24} + 12(\wp_{11}\wp_{24} - \wp_{12}\wp_{14}).]$$

A GENERALISATION OF A THEOREM OF M. PICARD WITH REGARD TO INTEGRALS OF THE FIRST KIND OF TOTAL DIFFERENTIALS

BY

ARTHUR BERRY,
of CAMBRIDGE (Engl.).

To the integrals connected with a plane curve, which are associated with the name of ABEL, correspond two distinct classes of integrals connected with an algebraic surface, viz. double integrals and integrals of total differentials. The latter were introduced into mathematical science by M. PICARD and a large part of what is at present known about them is due to him[1].

If a surface of order n,

$$(1) \qquad f(x, y, z, w) = 0,$$

admits of an integral of the *first* kind, it is necessary that four homogeneous polynomials, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, of order $n-3$, should exist, which satisfy the identity

$$(2) \qquad \theta_1 f_x + \theta_2 f_y + \theta_3 f_z + \theta_4 f_w = 0,$$

and that the determinants of order $n-2$, belonging to the array

$$\left\| \begin{matrix} \theta_1, & \theta_2, & \theta_3, & \theta_4 \\ x, & y, & z, & w \end{matrix} \right\|,$$

[1] M. PICARD's first important memoir on the subject appeared in LIOUVILLE's Journal, sér. IV, t. 1 (1885); the chief results are to be found in the *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* which he published in 1897 in conjunction with M. SIMART. All the results which I use are contained in chapter V of this book.

should vanish at every singular point of the surface. They must also satisfy further conditions, at present imperfectly known, at points of higher multiplicity.

It is also known that, if an integral of the first kind exists, the surface must have at least one singular point. The object of this note is to generalize this result.

Let us take two points (P, Q) in space with coordinates $(\lambda, \mu, \nu, \varpi)$ and $(\lambda', \mu', \nu', \varpi')$; then if we avoid special positions we can take ∞^4 positions of PQ such that the tangent planes through PQ touch the surface in n' distinct points, which do not lie on any singular line or at any singular points of the surface; n' is then the *class* of the surface.

The coordinates of these n' points satisfy the equations

$$(4) \qquad \lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z + \varpi f_w = 0$$

$$(5) \qquad \lambda' f_x + \mu' f_y + \nu' f_z + \varpi' f_w = 0$$

as well as

$$(6) \qquad nf \equiv xf_x + yf_y + zf_z + wf_w = 0.$$

Also, by hypothesis, f_x, f_y, f_z, f_w do not all vanish at these points; hence eliminating these differential coefficients between (4), (5), (6) and the identical relation (2), we have:

$$(7) \qquad F \equiv \begin{vmatrix} \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \\ x, y, z, w \\ \lambda, \mu, \nu, \varpi \\ \lambda', \mu', \nu', \varpi' \end{vmatrix} = 0.$$

This is a surface of order $n-2$, on which the n' points also lie.

Thus the n' points lie on each of the surfaces (4), (5), (7); but these surfaces cannot meet in more than $(n-1)^2(n-2)$ points, unless they have a common curve.

If possible let these three surfaces have a common curve; then if this curve also lie on $f=0$ it follows from (4) and (5) that the tangent plane at every point of it passes through PQ, which is impossible unless it be

a double (or multiple) curve on $f=0$. We may therefore assume that along this curve, assumed not to be a multiple curve on $f=0$,

$$(8)\qquad xf_x + yf_y + zf_z + wf_w = k,$$

where $k \neq 0$, except at a finite number of points where the curve meets $f=0$.

Solving for f_w from (2), (4), (5) and (8) we have

$$f_w \, . \, F = k \begin{vmatrix} \theta_1 , & \theta_2 , & \theta_3 \\ \lambda , & \mu , & \nu \\ \lambda' , & \mu' , & \nu' \end{vmatrix} .$$

But $F=0$ along the curve, therefore also along it

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \theta_1 , & \theta_2 , & \theta_3 \\ \lambda , & \mu , & \nu \\ \lambda' , & \mu' , & \nu' \end{vmatrix} = 0 .$$

Thus the curve in question is some part of the intersection of the surfaces (5) and (9); but these are independent of ϖ, so that the curve remains fixed as ϖ varies continuously; accordingly it lies on all the surfaces given by (4) as ϖ varies continuously; hence it lies on $f_w = 0$. Similarly it lies on $f_x = 0$, $f_y = 0$, $f_z = 0$; it is therefore a double curve on $f=0$.

Again, since F is a linear combination of the determinants (3), the surface $F=0$ passes, with a certain multiplicity, through the multiple points and curves of $f=0$; let us suppose that these singularities absorb q of the intersections of (4), (5), (7), so that the remaining points of intersection are diminished to

$$(n-1)^2(n-2)-q .$$

We have thus the inequality

$$(10)\qquad n' \leqq (n-1)^2(n-2)-q .$$

But for a non singular surface

$$n' = (n - 1)^2 n,$$

so that there must be enough singularities to diminish the class of the surface by at least

$$2(n - 1)^2 + q.$$

We can obtain a second inequality of a similar character by considering the number of points of intersection of one of the polars, say (4), with $f = 0$, $F = 0$. By similar reasoning we can shew that these three surfaces can have no common curve other than a multiple curve on $f = 0$, so that the number of points of intersection distinct from singularities is $n(n-1)(n-2) - r$, where r is the number of intersections of the three surfaces absorbed by the singularities of $f = 0$. We thus obtain

$$(11) \qquad n' \leqq n(n-1)(n-2) - r,$$

so that there must be enough singularities to diminish the class by at least

$$n(n - 1) + r.$$

In the case of the simplest kinds of singular points and singular lines the numbers q and r can be calculated without difficulty; but in the more complicated cases I do not know of any methods that are generally applicable. Accordingly I only illustrate these inequalities by some very simple cases.

If any multiple point of $f = 0$ is equivalent to the same number of intersections of $f = 0$ with two polars on the one hand, and with one polar and $F = 0$ on the other hand, its presence effects both sides of (11) equally. This is the case with an ordinary conical point of order 2, which diminishes the class by 2, and with a biplanar point of the simplest kind, which diminishes the class by 3 and also counts triply as an intersection of $F = 0$ with $f = 0$ and a polar, since it can easily be shewn that $F = 0$, like a polar, has a tangent plane passing through the intersection of the two tangent planes to the surface at the biplanar point. It follows that if the only singularities of the surface are double points of these two species, the inequality (11) is impossible. We thus get the result:

a surface, the only singularities of which are double points which diminish the class by 2 *or* 3, *can have no integral of the first kind of a total differential.*

Let us next suppose that the only singularity is a nodal double curve, reducible or otherwise, of order m, with h apparent double points and t actual triple points; then if there are no further singularities on the curve, other than those which result necessarily from these characteristics, it is known[1] that the curve diminishes the class of $f = 0$ by

$$m(7n - 4m - 8) + 8h + 9t.$$

Also since $F = 0$ and the two polars pass through this curve it absorbs at least

$$q \equiv m(n - 1 + n - 1 + n - 2 - m - 1) + 2h$$

of the points of intersection of the three surfaces[2].

Similarly the curve absorbs at least

$$r \equiv m\{n + 2(n - 1) + 2(n - 2) - 2m - 2\} + 4h$$

of the points of intersection of $F = 0$, a polar and $f = 0$.

Substituting in (10) and (11) we have the inequalities

(12) $$m(4n - 3m - 3) + 6h + 9t \geqq 2(n - 1)^2$$

and

(13) $$2m(n - m) + 4h + 9t \geqq n(n - 1).$$

These formulæ may be illustrated by the cases of quartic and quintic surfaces.

In the case of a quartic surface ($n = 4$), if $m > 2$, the surface is rational or reducible; rejecting these cases we see that the only admissible solution of these inequalities is given by

$$m = 2, \qquad h = 1, \qquad t = 0.$$

The nodal curve accordingly consists of two non-intersecting straight lines; and it is known that this quartic does admit of an integral of the first kind.

---

[1] SALMON'S *Geometry of three Dimensions*, § 94. I follow the notation of § 386, which is different from that of this article.

[2] *Ib.* § 386.

In the case of a quintic surface ($n = 5$), we can exclude for the same reason as before the cases of $m > 5$; the inequalities reduce to

$$m(17 - 3m) + 6h + 9t \geqq 32$$

and

$$m(10 - 2m) + 4h + 9t \geqq 20.$$

The inequalities obviously cannot be satisfied by $m = 1$ or $m = 2$.
If $m = 3$, then

$$6h + 9t \geqq 8, \qquad 4h + 9t \geqq 8,$$

whence

$$h \geqq 2; \quad \text{or} \quad t \geqq 1.$$

In the former case we have a conic and a straight line, or three straight lines which are not coplanar, and in either case it is easily shewn that the surface is rational or reducible; in the latter case we have three straight lines meeting in a point.
If $m = 4$, then

$$6h + 9t \geqq 12, \qquad 4h + 9t \geqq 12,$$

whence

$$h \geqq 3, \quad \text{or} \quad h \geqq 1, t \geqq 1, \quad \text{or} \quad t \geqq 2.$$

It is easy to verify that in all these cases the quintic must be rational or reducible.
If $m = 5$, then

$$6h + 9t \geqq 22, \qquad 4h + 9t \geqq 20,$$

whence

$$h \geqq 5, \quad \text{or} \quad h \geqq 3, t \geqq 1, \quad \text{or} \quad h \geqq 1, t \geqq 2, \quad \text{or} \quad t \geqq 3.$$

It is again easy to verify that in all cases except the first the quintic must be rational or reducible if it can exist at all; and that we have left the case in which the double curve is an irreducible quintic with 5 apparent double points. I have verified by other methods that such a quintic effectively possesses an integral of the first kind.

Cambridge, Jan. 1902.

ÜBER DIE METACYKLISCHEN GLEICHUNGEN VON PRIMZAHLGRAD

VON

A. WIMAN

in UPSALA.

§ 1. *Referat über die Arbeiten von Abel, Kronecker und Herrn Weber.*

Wie lebhaft sich ABEL für das Problem der algebraischen Auflösung der Gleichungen interessiert hat, ist aus wiederholten Äusserungen in seinen Briefen ersichtlich.[1] Zunächst war es ihm gelungen den ersten vollständigen Beweis zu erbringen, dass die allgemeinen Gleichungen von höherem als dem vierten Grade nicht durch Radikale auflösbar oder, wie wir mit Herrn WEBER sagen wollen, nicht metacyklisch sind. Durch eine Vertiefung der hierbei angewandten Methode wollte er alsdann zeigen, wie man alle metacyklischen Gleichungen aufstellen kann.[2] Seine diesbezüglichen Untersuchungen waren leider bei seinem frühzeitigen Tode unvollendet. So hat er die wichtigen Sätze, vermittelst deren die Aufgabe auf primitive metacyklische Gleichungen von Primzahlpotenzgrad reduziert wird, ohne Beweis hinterlassen (Oeuvres II, p. 222). Bezüglich der metacyklischen Gleichungen vom 5. Grade hat er in einem Briefe an CRELLE (Oeuvres II, p. 266) die allgemeine Gestalt der Wurzeln angegeben. Eine entsprechende Darstellung für die Wurzeln einer metacyklischen Gleichung

[1] In einem Briefe an HOLMBOE (Oeuvres II, p. 260) bezeichnet er diese Aufgabe als sein »Thème favori».

[2] Hier lassen wir unerörtert die wichtigen Klassen von *speciellen* metacyklischen Gleichungen, welche ABEL entdeckt hat, wie die nach ihm benannten ABEL'schen, sowie die damit verwandten Gleichungen der komplexen Multiplikation.

von einem beliebigen Primzahlgrade p wurde von KRONECKER bei seiner Wiederaufnahme des Problems gegeben.[1] Hierbei treten als Endradikale die p^{ten} Wurzeln aus gewissen Grössen r auf, welche ihrerseits einer cyklischen Gleichung vom Grade n genügen, wobei n einen Teiler von $p - 1$ bedeutet. In seiner späteren Note gab KRONECKER für diese Grössen r explicite Ausdrücke durch Kreisteilungsgrössen, wobei er den freilich erst in neuerer Zeit von den Herren WEBER und HILBERT bewiesenen Satz benutzte, dass alle im absoluten Rationalitätsbereiche ABEL'schen Körper Kreisteilungskörper sind. Es war aber noch kein Beweis gegeben, dass die Wurzeln einer metacyklischen Gleichung von Primzahlgrad sich wirklich in der angegebenen Weise darstellen lassen. Ein solcher wurde erst von Herrn WEBER erbracht.[2] Die Form der Wurzeln, um welche es sich bei diesem Beweise handelt, ist jedoch in gewissen Fällen nicht als die eigentlich naturgemässe zu betrachten. In der Tat hatte schon KRONECKER, wie oben angedeutet wurde, eine Fallunterscheidung eingeführt. Die verschiedenen Fälle beziehen sich, wie wir hier zeigen wollen, in ziemlich komplizierter Weise einerseits auf die Gruppe der Gleichung, anderseits auf die verschiedenen Möglichkeiten betreffend den gemeinsamen Unterkörper des durch die Wurzeln der Gleichung gebildeten Körpers und des Körpers der p^{ten} Einheitswurzeln.

§ 2. *Die Gruppe des Körpers* $R(x, \varepsilon)$.

Es sei mit R der zu Grunde gelegte Rationalitätsbereich bezeichnet. Die Wurzeln $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}$ der Gleichung bestimmen einen Körper $R(x)$ über R. Werden hierzu noch die p^{ten} Einheitswurzeln adjungiert, so erhält man einen Körper $R(x, \varepsilon)$.

Die am Ende des vorigen Paragraphen besprochenen Verhältnisse beruhen nun darauf, das die einzelnen Radikale, welche in den Ausdrücken für die Wurzeln auftreten, nicht dem Körper $R(x)$, sondern erst dem Körper $R(x, \varepsilon)$ angehören. Da es sich also um Grössen in diesem Körper

[1] Berl. Ber. 1853, p. 365; 1856, p. 203. Doch ist es, nach den unvollständigen Notizen zu urteilen, welche aus dem Nachlasse ABEL's hierüber publiziert worden sind (Oeuvres II, p. 233—243), höchst wahrscheinlich, dass schon ABEL die fragliche Darstellung gekannt hat.

[2] Marb. Ber. 1892, p. 3; Algebra I, Abschn. 18.

handelt, so ist zunächst die zugehörige Gruppe zu bestimmen. Da die Gleichung irreduktibel sein soll, so lassen sich die Wurzeln in solcher Weise ordnen, dass für

(S) $$x'_i = x_{i+1}$$

(T) $$x'_i = x_{ig^e} \qquad (i=0,1,\ldots,p-1)$$

die Gruppe G des Körpers $R(x)$ durch die Substitutionen S und T erzeugt wird,[1] wobei die Indices nach dem Modul p genommen werden sollen, g eine Primitivzahl nach p, und e einen Teiler von $p-1$ bedeutet. Die Gruppe G hat dann die Gradzahl $\frac{p(p-1)}{e}$.

Die Grösse $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ bestimmt bekanntlich über den Körper der rationalen Zahlen einen Körper $k(\varepsilon)$ vom Grade $p-1$, dessen Gruppe durch die Substitution $U = (\varepsilon : \varepsilon^g)$ erzeugt wird. Der Einfachheit halber machen wir, falls nicht ausdrücklich anderes vorausgesetzt wird, die Annahme, im Rationalitätsbereiche R sei kein höherer Unterkörper von $k(\varepsilon)$ als der Körper der rationalen Zahlen enthalten. Der Körper $R(\varepsilon)$ über R hat dann ebenfalls den Grad $p-1$, und die Gruppe Γ dieses Körpers lässt sich durch U erzeugen.

Den gemeinsamen Unterkörper, welchen die über R aufgebauten Körper $R(x)$ und $R(\varepsilon)$ gemein haben, bezeichnen wir mit $R(\sigma)$, wo σ eine den Körper bestimmende Grösse bedeutet. Dieser Körper muss zu ausgezeichneten Untergruppen von sowohl G als Γ gehören, welche je von gleichem Index sein sollen. Die ausgezeichneten Untergruppen von G sind nun den Teilern von $\frac{p-1}{e}$ zugeordnet, so dass zu jedem solchen Teiler e_1 eine durch S und T^{e_1} erzeugte Gruppe gehört. Den gleichen Index e_1 besitzt die durch U^{e_1} erzeugte Untergruppe von Γ. Sowohl durch T als durch U wird offenbar die Reihe der zu σ conjugierten Grössen $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{e_1-1}$ cyklisch verschoben, und es giebt für $e_1 > 1$ immer eine Operation U^l, wo l eine relative Primzahl gegen e_1 sein muss, welche dieselbe Verschiebung wie T bewirkt.

Die Gruppe Δ des Körpers $R(x, \varepsilon)$ lässt sich durch die Substitutionen ausdrücken, denen bei ihr die den Körper bestimmenden Grössen x und ε unterworfen werden. Wie sofort ersichtlich, dürfen bei Δ nur solche Sub-

[1] Vergl. Galois, oeuvr., p. 47.

stitutionen in $R(x)$ und $R(\varepsilon)$ gleichzeitig ausgeführt werden, bei denen die Grösse σ in dieselbe conjugierte Grösse übergeführt wird. Umgekehrt muss auch Δ alle Operationen von dieser Eigenschaft enthalten, denn anderenfalls wäre der Grad von Δ nicht $\frac{p-1}{e_1}$ mal so gross als der Grad von G. Dies muss aber der Fall sein, weil der Körper $R(x, \varepsilon)$ in Bezug auf $R(x)$ den Relativgrad $\frac{p-1}{e_1}$ besitzt, welche Tatsache aus dem Umstande folgt, dass $R(x)$ keinen höheren Unterkörper von $R(\varepsilon)$ als $R(\sigma)$ vom Grade e_1 enthalten darf. Bezeichnen Σ bez. Σ_1 die beiden oben besprochenen ausgezeichneten Untergruppen von G bez. Γ, so lassen sich die $\frac{p(p-1)^2}{ee_1}$ Operationen von Δ in der folgenden Weise darstellen:

$$(1) \qquad (\Sigma, \Sigma_1); (T\Sigma, U^{\prime}\Sigma_1); \ldots (T^{e_1-1}\Sigma, U^{\prime(e_1-1)}\Sigma_1),$$

wo die Substitutionen von Σ und Σ_1 auf alle möglichen Weisen kombiniert werden.[1]

§ 3. *Die Resolventen.*

Vermittelst der symmetrischen Funktion

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{p-1} = A$$

und der sogenannten LAGRANGE'schen Resolventen

$$(\varepsilon^i, x) = x_0 + \varepsilon^i x_1 + \ldots + \varepsilon^{i(p-1)} x_{p-1}$$

giebt man bekanntlich die Wurzeln der Gleichung in der Gestalt:

$$(2) \qquad x_\varkappa = \frac{1}{p}\left[A + \sum_{i=1}^{i=p-1} \varepsilon^{-\varkappa i}(\varepsilon^i, x)\right].$$

Man hat also in diesen Ausdrücken die p^{ten} Wurzeln aus den Grössen

$$\rho_i = (\varepsilon^i, x)^p$$

[1] In dem allgemeineren Falle, wo R einen Unterkörper von $k(\varepsilon)$ vom Grade δ enthält, hat man $\frac{p-1}{\delta}$ als Grad von $R(\varepsilon)$. Es muss dann e_1 auch Teiler von $\frac{p-1}{\delta}$ sein, und die Gruppe Δ besitzt den Grad $\frac{p(p-1)^2}{ee_1\delta}$.

zu ziehen. Wir wollen nun zunächst *die Gruppe des durch diese Grössen* ρ *bestimmten Körpers* $R(\rho)$ *ermitteln* und dann nachweisen, wie die Radikale (ε^i, x) durch ein einziges von ihnen und Grössen im Körper $R(\rho)$ sich rational ausdrücken lassen.

Erstere Aufgabe erledigen wir, indem wir untersuchen, welchen Einfluss die Substitutionen von Δ auf diese Grössen ρ ausüben. Bleiben nämlich alle Grössen ρ bei einer Untergruppe Δ_1, welche innerhalb Δ ausgezeichnet sein muss, invariant, so ist die fragliche Gruppe als Faktorgruppe $\frac{\Delta}{\Delta_1}$ zu charakterisieren. Hierbei haben wir, da S offenbar keine Vertauschung unter den ρ bewirkt, nur Substitutionen von der Gestalt $T^\lambda U^\mu$ in Betracht zu ziehen. Eine solche Operation führt

$$\rho_i = [x_0 + \sum \varepsilon^{ih} x_h]^p \tag{3}$$

in

$$[x_0 + \sum \varepsilon^{ihg^\mu} x_{hg^{e\lambda}}]^p = [x_0 + \sum \varepsilon^{ihg^{\mu - e\lambda}} x_h]^p = \rho_{ig^{\mu - e\lambda}} \tag{3'}$$

über. Nehmen wir noch auf den später zu beweisenden Satz Bezug, dass [für $\mu - e\lambda \not\equiv 0 \pmod{p - 1}$] wenigstens zwei Grössen ρ_i und $\rho_{ig^{\mu - e\lambda}}$ von einander verschieden sind, so können wir jetzt den Satz aussprechen, dass *die Gruppe von* $R(\rho)$ *cyklisch ist und den Grad* $\frac{p-1}{e_2}$ *besitzt, wo* e_2 *den grössten Teiler von* $p - 1$ *bedeutet, welcher bei jeder zulässigen Kombination von* μ *und* λ *in* $\mu - e\lambda$ *aufgeht.* Nach (1) ist $\mu = kl + k_1 e_1$, $\lambda = k + k_2 e_1$, also $\mu - e\lambda = k(l - e) + k_1 e_1 - k_2 e e_1$, wo die ganzen Zahlen k, k_1 und k_2 nach den bezüglichen Moduln e_1, $\frac{p-1}{e_1}$ und $\frac{p-1}{ee_1}$ beliebig genommen werden können. Hieraus ersieht man, dass e_2 *den grössten gemeinsamen Teiler von* e_1 *und* $e - l$ *darstellen muss.* Die Grössen ρ zerlegen sich in e_2 Systeme von je $\frac{p-1}{e_2}$ conjugierten Grössen, so dass die Grössen $\rho_i, \rho_{ig^{e_2}}, \dots \rho_{ig^{p-1-e_2}}$ jedesmal zu demselben Systeme gehören, wobei natürlich die Indices $i, ig^{e_2}, \dots$ nach dem Modul p zu nehmen sind.

Bei der Auflösung einer metacyklischen Gleichung vom Grade p sind also von Bedeutung:

1) die Gradzahl $\frac{p(p-1)}{e}$ der Gruppe der Gleichung; hier giebt es so viele Möglichkeiten, wie $p - 1$ Teiler besitzt;

2) der Grad e_1 des gemeinsamen Unterkörpers von $R(x)$ und $R(\varepsilon)$; die Anzahl der Möglichkeiten ist hier gleich der Anzahl der verschiedenen Teiler von $\frac{p-1}{e}$;

3) für $e_1 > 1$ der Exponent l in der Operation TU^l, welche in der Gruppe des Körpers $R(x, \varepsilon)$ auftritt; da l nach dem Modul e_1, und zwar als relative Primzahl, zu nehmen ist, so giebt es hier $\varphi(e_1)$ Möglichkeiten.

Ist eine Grösse $\rho = 0$, so verschwinden nach den Grundsätzen der GALOIS'schen Gleichungstheorie auch die übrigen Grössen ρ, welche demselben conjugierten Systeme angehören. Es muss aber mindestens ein System von Grössen ρ geben, dessen Glieder nicht identisch verschwinden; anderenfalls wären ja nach (2) die Wurzeln x gleich gross und rational. Es lässt sich immer durch geeignete Wahl der Indices der Wurzeln erreichen, das $\rho_1 = (\varepsilon, x)^p$ nicht verschwindet.

Wir wollen jetzt beweisen, dass *die nicht verschwindende Grösse* ρ_1 bei keiner Operation von Δ, welche in Δ_1 nicht enthalten ist, ungeändert bleiben kann, also *eine primitive Grösse in dem zu* Δ_1 *gehörigen Unterkörper von* $R(x, \varepsilon)$ *darstellt,* so dass alle Grössen des fraglichen Unterkörpers sich rational durch ρ_1 ausdrücken lassen.

Nach (3) und (3') genügt es für unseren Beweis, falls wir nachweisen können, *dass* ρ_1 *von jeder anderen Grösse* ρ_i *verschieden sein muss.* Nun bleibt der Ausdruck

$$(4) \qquad \frac{(\varepsilon^i, x)}{(\varepsilon, x)^i}$$

sowohl bei S als bei jeder Operation von der Gestalt $T^\lambda U^{e\lambda}$, also bei allen in Δ_1 enthaltenen Operationen, invariant. Es gelten mithin Relationen von der Gestalt

$$(5) \qquad (\varepsilon^i, x) = r_i(\varepsilon, x)^i,$$

wo die r_i solche Grössen des Körpers $R(x, \varepsilon)$ bedeuten, welche die Operationen von Δ_1 zulassen. Wäre nun für ein besonderes i

$$(\varepsilon^i, x)^p = (\varepsilon, x)^p,$$

so hätten wir eine Relation

$$(\varepsilon^i, x) = \varepsilon^a(\varepsilon, x),$$

woraus nach (5)

$$(\varepsilon, x)^{i-1} r_i = \varepsilon^a.$$

Da

$$i \not\equiv 1 \pmod{p}$$

so lassen sich die ganzen Zahlen k und k_1 so bestimmen, dass

$$k(i-1) = 1 + k_1 p.$$

Aus der Relation

$$(\varepsilon, x)^{k(i-1)} r_i^k = \varepsilon^{ka}$$

würde man dann erhalten

$$(\varepsilon, x) = \rho_1^{-k_1} r_i^{-k} \varepsilon^{ka}.$$

Man hätte also für (ε, x) einen Ausdruck, dessen sämmtliche Faktoren bei der Operation S ungeändert bleiben sollten. Dasselbe würde dann auf Grund der Relationen (5) für sämmtliche Resolventen (ε^i, x) gelten, und mithin nach (2) für die Wurzeln x. Wir sind also durch unsere Annahme $\rho_1 = \rho_i$ auf die Ungereimtheit gestossen, dass die Wurzeln x die Operation S zulassen sollten.

Nach der jetzt bewiesenen Eigenschaft der Grösse ρ_1, dass sie eine primitive Grösse des zur Gruppe Δ_1 gehörigen Unterkörpers von $R(x, \varepsilon)$ liefert, können wir den Relationen (5) die folgende Form geben:

$$(\varepsilon^i, x) = f_i(\rho_1)(\varepsilon, x)^i, \tag{6}$$

wo die f_i rationale Funktionen bedeuten. Führt man in einer Relation (6) die Substitutionen von Δ aus, so erhält man

$$(\varepsilon^{ig^{\nu e_2}}, x) = f_i(\rho_{g^{\nu e_2}})(\varepsilon^{g^{\nu e_2}}, x)^i \qquad \left(\nu = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{e_2} - 1\right), \tag{7}$$

und zwar hat man $p-2$ solche Systeme von Relationen (7), da man in (6) für i irgend eine von den Zahlen $2, 3, \ldots, p-2$ setzen kann.

§ 4. *Die Wurzelformen.*

Die folgenden Relationen erhält man direkt aus (6) und (7), indem man die Bezeichnungsweise etwas ändert:

$$
(8) \quad
\begin{aligned}
&(\varepsilon^{g^{e_2}}, x)(\varepsilon, x)^{-g^{e_2}} &&= k_0; \\
&(\varepsilon^{g^{2e_2}}, x)(\varepsilon^{g^{e_2}}, x)^{-g^{e_2}} &&= k_1; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(\varepsilon, x)(\varepsilon^{g^{p-1-e_2}}, x)^{-g^{e_2}} &&= k_{\frac{p-1}{e_2}-1}.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist, wenn $k_0 = k(\rho_1)$ gesetzt wird,

$$k_i = k(\rho_{g^{ie_2}}),$$

so dass die k_i ein System von conjugierten Grössen des Körpers $R(\rho)$ bilden.

Wenn wir diese Funktionen $k_0, k_1, \ldots, k_{\frac{p-1}{e_2}-1}$ der Reihe nach zu den Potenzen $g^{p-1-e_2}, g^{p-1-2e_2}, \ldots 1$ erheben und dann multiplizieren, so heben sich im Produkt der linken Seite von (8) alle Resolventen mit Ausnahme von (ε, x) heraus, und man bekommt

$$
(9) \quad (\varepsilon, x)^{1-g^{p-1}} = k_0^{g^{p-1-e_2}} k_1^{g^{p-1-2e_2}} \ldots k_{\frac{p-1}{e_2}-1}.
$$

Wir wählen g, was immer möglich ist, so, dass

$$g^{\prime -1} - 1 \equiv -p \pmod{p^2}.$$

Es sei nämlich für eine besondere Primitivzahl g_1 nach p

$$g_1^{p-1} - 1 \equiv lp \pmod{p^2}.$$

Wir setzen dann

$$g = g_1 + mp,$$

so dass

$$g^{p-1} - 1 \equiv g_1^{p-1} - 1 + m(p-1)g_1^{p-2}p \equiv (l - mg_1^{p-2})p \pmod{p^2},$$

und es lässt sich immer eine ganze Zahl m so bestimmen, dass die Kongruenz

$$l - mg_1^{p-2} \equiv -1 \pmod{p}$$

befriedigt wird.

Nachdem wir durch die Relationen:

$$1 - g^{p-1} = p - hp^2\,;\; g^{\nu} = pq_{\nu} + r_{\nu}\,,\; 0 < r_{\nu} < p \qquad {\scriptstyle (\nu = 0, 1, \ldots, p-1)}$$

die ganzen Zahlen h, q_{ν} und r_{ν} ermittelt haben, setzen wir

$$(\varepsilon\,,\,x)^{hp} k_0^{q_{r-1-e_2}} k_1^{q_{p-1-2e_2}} \ldots = K_0(\rho_1)\,.$$

Es geht dann (9) in

$$(10) \qquad (\varepsilon\,,\,x)^p = [K_0(\rho_1)]^p k_0^{r_{p-1-e_2}} k_1^{r_{p-1-2e_2}} \ldots k_{\frac{p-1}{e_2}-1}$$

über.

Es lässt sich beweisen, dass *die Grössen k_i primitive Grössen des Körpers $R(\rho)$ darstellen,* so dass keine zwei unter ihnen einander gleich sein können. Gehörten nämlich diese Grössen schon zu einem Unterkörper von $R(\rho)$ vom etwaigen Index $\frac{p-1}{e_2 c_3}$, so würden sie die Substitution $(\rho_1 : \rho_{g^{e_2 e_3}})$ zulassen. Man hätte also

$$k_i = k_{i+e_3} = k_{i+2e_3} = \ldots = k_{i+\frac{p-1}{e_2}-e_3}\,,$$

wo wir $i < e_3$ annehmen wollen. In (9) wäre mithin k_i zu der Potenz

$$g^{p-1-ie_2} + g^{p-1-ie_2-e_3e_2} + \ldots + g^{e_3e_2-ie_2}$$

erhoben. Diese Summe ist aber durch p teilbar. Es sind ja die betreffenden $\frac{p-1}{e_2 e_3}$ Glieder Wurzeln der Kongruenz

$$x^{\frac{p-1}{e_2 e_3}} \equiv g^{\frac{(e_3-i)(p-1)}{e_3}} \pmod{p}\,.$$

Offenbar ist dann auch die Summe der zugehörigen Reste

$$r_{p-1-ie_2} + r_{p-1-ie_2-e_3e_2} + \ldots + r_{e_3e_2-ie_2}$$

durch p teilbar. Man würde also, falls man in (10) beiderseits die p^{ten} Wurzeln auszieht, für $(\varepsilon\,,\,x)$ einen rationalen Ausdruck durch ε und Grössen des Körpers $R(\rho)$ erhalten. Wir hatten aber schon im vorigen Paragraphen Gelegenheit, den Widerspruch bei einer solchen Folgerung hervorzuheben.

Werden in (10) die Substitutionen von Δ ausgeführt, so erhält man $\frac{p-1}{e_2}-1$ neue Relationen:

$$(11) \qquad (\varepsilon^{g^{\nu e_2}}, x)^p = [K_0(\rho_{g^{\nu e_2}})]^p k_\nu^{r_{p-1-e_2}} k_{\nu+1}^{r_{p-1-2e_2}} \ldots k_{\nu-1} \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{e_2}-1\right),$$

wo die Indices $\nu + i$ nach dem Modul $\frac{p-1}{e_2}$ genommen werden.

Schreiben wir zur Abkürzung

$$(12) \qquad \tau_\nu = k_\nu^{\frac{1}{p}},$$

so ergiebt sich aus (10), indem man rechts und links die p^{ten} Wurzeln auszieht,

$$(13) \qquad (\varepsilon, x) = K_0(\rho_1)\tau_0^{r_{p-1-e_2}}\tau_1^{r_{p-1-2e_2}} \ldots \tau_{\frac{p-1}{e_2}-1}.$$

In entsprechender Weise erhalten wir aus (11)

$$(14) \qquad (\varepsilon^{g^{\nu e_2}}, x) = K_0(\rho_{g^{\nu e_2}})\tau_\nu^{r_{p-1-e_2}}\tau_{\nu+1}^{r_{p-1-2e_2}} \ldots \tau_{\nu-1} \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{e_2}-1\right),$$

wo die Radikale τ_ν in derselben Weise genommen werden können wie in (13). Nach (8) hat man ja

$$(\varepsilon^{g^{\nu e_2}}, x)(\varepsilon, x)^{-g^{\nu e_2}} = k_{\nu-1} k_{\nu-2}^{g^{e_2}} \ldots k_0^{g^{(\nu-1)e_2}}.$$

Man ersieht aber aus den in diesem Paragraphen gegebenen Relationen leicht, dass diese Identität nicht bestehen würde, falls bei der obigen Wahl der τ_ν auf der rechten Seite von (14) noch eine Potenz von ε als Faktor hinzukäme.

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man für jede Resolvente (ε^i, x). Zunächst lässt sich setzen

$$i \equiv g^{\mu+\nu e_2} \pmod{p} \quad \left[0 \leqq \mu < e_2, \qquad 0 \leqq \nu < \frac{p-1}{e_2}\right].$$

Aus den Relationen (6), (7), (13) und (14) erschliesst man dann, dass Identitäten von der Gestalt

$$(15) \qquad (\varepsilon^{g^{\mu+\nu e_2}}, x) = K_\mu(\rho_{g^{\nu e_2}})\tau_\nu^{r_{p-1-e_2+\mu}}\tau_{\nu+1}^{r_{p-1-2e_2+\mu}} \ldots \tau_{\nu-1}^{r_\mu}$$

bestehen müssen, wo eine gegenseitige Abhängigkeit zwischen den e_2 Funktionen $K_0, K_1, \ldots, K_{e_2-1}$ nicht stattfindet. Der Wurzelausdruck (2) nimmt jetzt die folgende Gestalt an:

$$(16) \qquad \frac{1}{p}\left[A + \sum_{\mu=0}^{\mu=e_2-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\frac{p-1}{e_2}-1} \dot{K}_\mu(\rho_{g^{\nu e_2}}) \prod_{\iota=0}^{\iota=\frac{p-1}{e_2}-1} \tau_{\nu+\iota}^{r_{p-1-(\iota+1)e_2+\mu}}\right].$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass (16) in einen Ausdruck von derselben Schreibweise übergeht, falls man irgend eine Operation der Gruppe Δ ausführt. Man findet auch, dass der Ausdruck nur p Werte annehmen kann, wie man auch die Radikale $k_\nu^{\frac{1}{p}} = \tau_\nu$ bestimmen mag. In der Tat, multipliziert man das Radikal τ_ν mit dem Faktor $e^{\frac{2k\pi i}{p}}$, so hat dies dieselbe Wirkung, als ob man dem Radikale τ_0 den Faktor $e^{\frac{2k\pi i}{p} r_{p-1-\nu e_2}}$ hinzufügt. *Man erhält mithin alle möglichen Werte von* (16), *indem man unter beliebiger Fixierung der übrigen Radikale dem Radikal τ_0 seine p verschiedenen Werte beilegt.*

Bei seiner Herleitung der Wurzelform betrachtet Herr Weber zunächst $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ als unabhängige Variable. Erst nachdem die nötigen Sätze über die Lagrange'schen Resolventen entwickelt worden sind, macht er die Festsetzung, dass die Variablen x die Wurzeln einer irreduktibeln metacyklischen Gleichung vom Grade p sein sollen. In solcher Weise erhält er eine in allen Fällen gültige, von der Rolle, welche die p^{ten} Einheitswurzeln gegenüber dem Körper $R(x)$ spielen, unabhängige Wurzelform, und zwar von der Gestalt (16) für den speciellen Fall $e_2 = 1$. Diese Verschiedenheit in den Endresultaten darf natürlich nur scheinbar sein. Bei Herrn Weber sind die $p-1$ Grössen $k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}$ die Wurzeln einer cyklischen Gleichung. Diese Gleichung braucht aber nicht irreduktibel zu sein, sondern kann in e_2 verschiedene Faktoren zerfallen, wo e_2 einen beliebigen Teiler von $p-1$ bedeuten kann. Der Körper, welchem die Grössen k_ι angehören, besitzt mithin den Grad $\frac{p-1}{e_2}$. Wollte man nun die in der Wurzelform des Herrn Weber auftretenden Grössen k_ι und K_ι durch ein conjugiertes System von $\frac{p-1}{e_2}$ Grössen des fraglichen Körpers darstellen, so würde man eben auf unsere Fallunterscheidungen gelangen, so weit sie in (16) ihren Ausdruck finden.

Es drängt sich noch die Frage auf, wie man, wenn die Grössen k_i oder ρ_i gegeben sind, also aus der Beschaffenheit einer Wurzelform (16), die Eigenschaften des zugehörigen Körpers $R(x)$ ablesen kann. In erster Linie handelt es sich dabei um den Grad $\frac{p(p-1)}{e}$ der Gruppe G, sowie um den Grad e_1 des gemeinsamen Unterkörpers $R(\sigma)$ von $R(x)$ und $R(\varepsilon)$.

Die Erledigung dieser Fragen beruht auf zweierlei Erwägungen. Zunächst lässt sich beweisen, dass der gemeinsame Unterkörper $R(\eta)$ von $R(\rho)$ und $R(\varepsilon)$ den Grad $\frac{ee_1}{e_2}$ besitzt. In der Tat muss jede Operation derjenigen Untergruppe Δ_2 von Δ, zu welcher der Körper $R(\eta)$ gehört, sich durch Kombination zweier Operationen erzeugen lassen, von denen eine auf die Grössen in $R(\rho)$, die andere auf die Grössen in $R(\varepsilon)$ keinen Einfluss übt. Hieraus erschliesst man, dass Δ_2 sich durch Kombination von Δ_1 und T^{e_1} erzeugen lässt und folglich als Untergruppe von Δ den Index $\frac{ee_1}{e_2}$ besitzen muss. Diesen Umstand können wir benutzen, um das Produkt ee_1 zu ermitteln.

Als Unterkörper von $R(\rho)$ gehört $R(\eta)$ zu der durch die Substitution $(\rho_1 : \rho_{g^{ee_1}})$ erzeugten Gruppe. Nun wissen wir aus § 3, dass eine Operation $T^\lambda U^\mu$, welche ja ε durch ε^{g^μ} ersetzt, ρ_1 in $\rho_{g^{\mu - e\lambda}}$ überführt. In Bezug auf die Grössen des Körpers $R(\eta)$ ist also die Operation nur dann mit $(\rho_1 : \rho_{g^\mu})$ äquivalent, wenn λ durch e_1 teilbar ist. Dann soll aber e_1 ebenfalls Teiler von μ sein, und wir haben, um e_1 zu bestimmen, nur darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Operationen $(\rho_1 : \rho_{g^{e_1}})$ und $(\varepsilon : \varepsilon^{g^{e_1}})$ dieselbe Umordnung unter den Grössen des Körpers $R(\eta)$ bewirken, und dass es für $\delta < e_1$ kein Paar in solcher Weise äquivalenter Operationen $(\rho_1 : \rho_{g^\delta})$ und $(\varepsilon : \varepsilon^{g^\delta})$ giebt.[1]

§ 5. *Rationale Transformation der Wurzeln.*

Wir können die K_μ und k_ν als ganze Funktionen der jedesmal zugehörigen Grösse ρ annehmen; nach bekannten Methoden kann man ja die Nenner rational machen. Etwaige Faktoren, welche zur p^{ten} Potenz in den k_ν auftreten, lassen sich aus dem Wurzelzeichen entfernen und den Funktionen K_μ zufügen. Allerdings erreicht man hiermit nicht immer eine ein-

[1] Vergl. KRONECKER, Berl. Ber. (1856), p. 214.

zige bestimmte Normalform für die Funktionen k_ν, wie Verhältnisse bei Zahlkörpern lehren, welche ausser Hauptidealen noch Nebenideale besitzen. Da die Grössen ρ eine Gleichung von Grade $\frac{p-1}{e_2}$ befriedigen, so kann man die Funktionen K_μ und k_ν als höchstens vom Grade $\frac{p-1}{e_2} - 1$ betrachten. Die e_2 Funktionen K_μ enthalten also als Koefficienten der Potenzen der bezüglichen Grössen ρ insgesammt $p - 1$ rationale Parameter.

Unterwirft man nun die Wurzeln x einer rationalen Transformation

(17) $$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1},$$

so ersieht man ohne Schwierigkeit, dass die y sich in eben derselben Gestalt (16) wie die x ausdrücken lassen, doch so, dass bei ungeändert gebliebenen k_ν die K_μ in andere Funktionen übergeführt werden. Da die Transformation (17) p rationale Parameter enthält, so kann man dem Ausdruck, in welchen (16) übergeht, p Bedingungen auferlegen, z. B.:

(18) $$A = 0\,;\; K_0 = 1\,;\; K_1 = K_2 = \ldots = K_{e_2-1} = 0\,.$$

In der Tat hat man, um diese Bedingungen zu erfüllen, nur ein System von p linearen Gleichungen für $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ aufzulösen, und die Determinante dieses Systems darf nicht verschwinden, weil dann eine Wurzel x einer Relation von niedrigerem als dem p^{ten} Grade genügen sollte. *Da also die metacyklischen Körper von Primzahlgrad nur von der Art abhängen, wie das conjugierte System von Funktionen k_ν gewählt wird, welche ihrerseits zu cyklischen Körpern niedrigeren Grades gehören, so haben wir hier ein geeignetes Mittel, um alle metacyklischen Zahlkörper von Primzahlgrad aufzustellen und zu klassifizieren, sowie die Kompositionseigenschaften zweier Körper zu studieren, welche in Bezug auf einen gemeinsamen Unterkörper relativ-*ABEL'sch *sind.* Bei Benutzung dieses Ausgangspunktes wird man ohne Zweifel die schönen Resultate verallgemeinern können, welche zuerst von KRONECKER und dann von den Herren WEBER und HILBERT über die ABEL'schen Zahlkörper gegeben worden sind.

DEUX THÉORÈMES D'ABEL SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES

PAR

M. HADAMARD

À PARIS.

On sait comment ABEL a fait entrer l'étude de la convergence des séries dans une voie nouvelle en montrant[1] l'impossibilité d'obtenir, par une règle unique, une condition nécessaire et suffisante de convergence.

Le résultat qu'il a établi peut s'énoncer ainsi:

I. Etant donnée la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

à termes positifs et divergentee, on peut toujours trouver une suite de nombres positifs

$$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{2}$$

tendant vers zéro, par lesquels on peut multiplier respectivement les termes de cette série, sans que la nouvelle série ainsi obtenue

$$\xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n + \ldots \tag{1'}$$

soit convergente.

Inversement, d'ailleurs,

II. Etant donnée une série convergente à termes positifs, on peut toujours trouver une suite de nombres positifs indéfiniment croissants par lesquels on peut multiplier respectivement les termes de cette série sans la rendre divergente.

---

[1] *Note sur le mémoire n° 4 du second tome du journal de M. Crelle, ayant pour titre »Remarques sur les séries infinies et leur convergence«.* — *Oeuvres,* tome I, pp. 111—113 de la première édition.

Et ces deux propositions admettent à leur tour la réciproque commune

III. A toute suite

(2) $$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

de nombres positifs qui croissent indéfiniment, on peut faire correspondre une suite de nombres positifs $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, tels que la série $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ soit convergente et la série $\xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n + \ldots$ divergente.

Il est d'ailleurs clair que ceci resterait vrai lors même qu'une partie seulement de ξ irait en croissant indéfiniment, les autres restant finis.

Je me suis occupé précédemment[1] de généraliser ces résultats à l'aide de ceux qu'a obtenus DU BOIS-REYMOND; et l'on sait que, depuis, M. BOREL a repris avec succès cet ordre de recherches.[2] Je ne sais s'il a été remarqué que la question peut recevoir une extension de nature différente. Si, en effet, on remarque que la convergence absolue de la série

(1) $$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

entraîne celle de la série (1') lorsque les ξ sont finis, on voit que la proposition III peut s'énoncer ainsi:

La condition nécessaire et suffisante que doivent remplir les nombres $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ pour que la convergence absolue de la série (1) *entraîne nécessairement celle de la série* (1'), *est que tous ces nombres ξ_n soient inférieurs en valeur absolue à une limite fixe.*

Cette proposition conduit dès lors à poser la question suivante:

Comment doit être choisie la suite

(2) $$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$$

pour que toute série (1) *convergente* (absolument ou non) *donne, lorsqu'on multiplie ses termes respectivement par $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ une série* (1') *également convergente?*

---

[1] Acta Mathematica, tome 18; 1894.

[2] Indépendamment des résultats que M. BOREL avait obtenus dans ses travaux précédents, ses récentes *Leçons sur les séries à termes positifs* contiennent un ensemble de vues nouvelles et importantes sur ces questions.

Or un autre théorème bien connu d'ABEL, le théorème III de ses *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots,$[1] montre immédiatement la catégorie des suites (2) qui jouissent de la propriété en question comme bien plus étendue qu'on n'aurait pu le supposer au premier abord. Il fait voir, en effet, que la convergence est toujours conservée si les multiplicateurs (2) sont des nombres positifs décroissants; et la même transformation qui conduit ABEL a ce résultat montre[2] que cette propriété subsiste dès que la série

$$(3) \qquad \xi_0 + (\xi_1 - \xi_0) + (\xi_2 - \xi_1) + \ldots + (\xi_{n+1} - \xi_n) + \ldots$$

est absolument convergente.

Au reste, il faut remarquer que ce résultat n'est pas essentiellement distinct de celui d'ABEL; car si la série (3) est absolument convergente, la quantité ξ_n (supposée réelle) peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \xi_n = A + \xi_n' - \xi_n''$$

où ξ_n' d'une part, ξ_n'' de l'autre, désignent des nombres positifs décroissants pendant que A est une constante.

Je dis que *la condition ainsi trouvée comme suffisante est en même temps nécessaire.*

Supposons, en effet, qu'elle ne soit pas remplie et que la série (3) ne soit pas absolument convergente. Nous pouvons, néanmoins, admettre que ξ_n reste fini (sans quoi nous savons que la suite (2) ne possèderait pas la propriété qui nous intéresse, même pour les séries à termes positifs). Alors, si nous désignons par i, d'une manière générale, les valeurs de n pour lesquelles $\xi_{n+1} - \xi_n$ est positif, et par k celles pour lesquelles cette même quantité est négative, la série à termes positifs

$$\sum (\xi_{i+1} - \xi_i)$$

et la série à termes négatifs

$$\sum (\xi_{k+1} - \xi_k)$$

[1] *Oeuvres,* tome I, page 69 de la première édition; page 222 de l'édition SYLOW et LIE.

[2] DIRICHLET-DEDEKIND, Vorlesungen über Zahlentheorie, 3e édition, suppl. IX, § 143. — Voir PRINGSHEIM, Encyclopädie der Mathem. Wissenschaften, I A3, p. 94.

seront divergentes. D'après le théorème I, nous pourrons, sans les rendre convergentes, multiplier les termes de la première par des quantités positives t_i qui tendent vers zéro, et les termes de la seconde par des quantités négatives t_k qui tendent également vers zéro. Dans ces conditions, la somme

$$(\xi_1 - \xi_0)t_0 + (\xi_1 - \xi_2)t_1 + \dots + (\xi_{n+1} - \xi_n)t_n$$

augmentera indéfiniment avec n.

Or par la transformation d'ABEL, cette somme s'écrit

$$-\xi_0 t_0 + \xi_1(t_0 - t_1) + \xi_2(t_1 - t_2) + \dots + \xi_n(t_{n-1} - t_n) + \xi_{n+1}t_n$$

et l'on peut y faire abstraction du premier terme ainsi que du dernier, puisque ξ_n est fini et t_n infiniment petit. Il apparaît alors que la suite (2) ne répond pas à la question, puisque la série $\sum(t_{n-1} - t_n)$ est convergente et la série $\sum \xi_n(t_{n-1} - t_n)$ divergente.

Donc *la condition nécessaire et suffisante cherchée est que la série* (3) *soit absolument convergente.*

Rien n'est d'ailleurs changé à cette conclusion si l'on suppose ξ_n imaginaire, soit

$$\xi_n = \eta_n + i\zeta_n.$$

D'une part, en effet, la convergence absolue de la série $\sum(\xi_{n+1} - \xi_n)$ entraîne celle des séries $\sum(\eta_{n+1} - \eta_n)$, $\sum(\zeta_{n+1} - \zeta_n)$. D'autre part, lorsqu'on suppose les u réels, la convergence de la série $\sum \xi_n u_n$ exige celle des séries $\sum \eta_n u_n$, $\sum \zeta_n u_n$, de sorte que la suite des η_n et celle des ζ_n doivent satisfaire séparément à la condition qui vient d'être trouvée.

En demandant que la convergence de la série (1) entraîne celle de la série (1′) on peut aussi demander, en outre, que, réciproquement, la convergence de celle-ci entraîne celle de la série (1). Alors, à la condition que la série (3) soit absolument convergente, il faudra évidemment ajouter celle que sa somme soit différente de zéro. La double condition ainsi obtenue est d'ailleurs suffisante, car, si $\lim \xi_n \neq 0$, la convergence absolue de la série (3) entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum\left(\frac{1}{\xi_{n+1}} - \frac{1}{\xi_n}\right) = \sum \frac{\xi_n - \xi_{n+1}}{\xi_n \xi_{n+1}}.$$

(D'une manière générale, si la fonction $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ admet des dérivées finies, la convergence absolue des séries $\sum(\xi_{n+1} - \xi_n)$, $\sum(\eta_{n+1} - \eta_n)$, $\sum(\zeta_{n+1} - \zeta_n)$ entraîne, en vertu de la formule des accroissements finis, celle de la série $\sum[\varphi(\xi_{n+1}, \eta_{n+1}, \zeta_{n+1}) - \varphi(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)])$.

Considérons, par exemple, la série qu'a formée ABEL dans son Mémoire *sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes*[1] et qui a été étudiée par HALPHEN dans le tome 18 du *Bulletin de la Société Mathématique de France.*[2]

HALPHEN constate (au n° 3 de son Mémoire) que le terme général de cette série est de la forme $\left(A + \frac{B}{n} + \frac{b_n}{n^2}\right) u_n$, où A est indépendant de n et où b_n reste fini, les nombres A et B étant d'ailleurs fonctions de la variable x; et il en déduit que la série $\sum u_n$ est nécessairement convergente si la série d'ABEL converge pour deux valeurs de x qui donnent au rapport $\frac{B}{A}$ des valeurs différentes.

Nous voyons qu'une telle restriction est inutile. La série

$$\sum\left[\left(A + \frac{B}{n} + \frac{b_n}{n^2}\right) - \left(A + \frac{B}{n+1} + \frac{b_{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right]$$

étant absolument convergente, la convergence de la série donnée ne pourra avoir lieu pour aucune valeur de x n'annulant pas A (c'est à dire, ici, pour aucune valeur de x différente de zéro), si la série $\sum u_n$ n'est pas convergente. Comme la particularité $A = 0$ qui se présente pour $x = 0$ est due à ce que tous les termes de la série d'ABEL (à l'exception du premier) contiennent x en facteur, si nous supprimons ce facteur, nous voyons que la série converge alors pour toutes les valeurs données à x ou ne converge pour aucune.

Nous sommes d'ailleurs à même d'indiquer tous les cas où la série de polynômes

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x)$$

(dans laquelle les P_n sont des polynômes déterminés et les a_n des constantes arbitraires) possède cette propriété de la série d'ABEL: je veux dire

[1] *Oeuvres,* tome II, p. 82 de la 1e édition; p. 73 de la 2e.

[2] p. 67 et suiv.; 1882.

où, pour tout choix des a_n, il y a nécessairement, soit convergence pour toute valeur de x, soit divergence pour toute valeur de x. C'est ce qui aura lieu lorsque la série dont le terme général est

$$(4) \qquad \frac{P_{n+1}(x')}{P_{n+1}(x)} - \frac{P_n(x')}{P_n(x)}$$

sera absolument convergente, quels que soient x et x'. Il est évidemment nécessaire, pour cela, que $P_n(x)$ puisse se mettre sous la forme

$$P_n(x) = \mu_n \sum_{k=1}^{n} p_k(x),$$

les μ_n étant des constantes quelconques et

$$p_1(x) + p_2(x) + \ldots + p_n(x) + \ldots$$

une série de polynômes absolument convergente dans tout le plan et dont la somme ne s'annulle jamais. Cette condition est, d'ailleurs, suffisante. Car, d'après une remarque faite plus haut, la convergence absolue des séries $\sum [P_{n+1}(x) - P_n(x)]$, $\sum [P_{n+1}(x') - P_n(x')]$ (les sommes de ces séries étant différentes de zéro) entraîne la convergence absolue de la série (4).

Quoiqu'il soit, comme on le voit, bien aisé d'obtenir la forme générale des polynômes P_n, ceux-ci présenteraient peut-être quelques propriétés intéressantes: le fait que $\frac{P_n(x')}{P_n(x)}$ a une limite semble, par exemple, montrer que leurs zéros vont, en général, en augmentant tous indéfiniment, ainsi qu'il arrive pour la série d'Abel.

On peut remarquer que, si les quantités *réelles* ξ_n tendent vers une limite ξ, on peut toujours les ranger dans un ordre tel que la série $\sum (\xi_{n+1} - \xi_n)$ soit absolument convergente. Cela est évident si les ξ_n tendent vers ξ par valeurs toutes inférieures ou toutes supérieures; dans le cas contraire, il suffira (ξ étant supposé égal à zéro pour simplifier le langage) de ranger par ordre de grandeur décroissante les termes positifs, par ordre de grandeur croissante les termes négatifs et de ne passer de l'un des groupes à l'autre qu'à des intervalles assez éloignés pour que la série formée par les termes de passage soit absolument convergente.

Il en est tout autrement dans le domaine complexe. Soient, par exemple, $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$ les termes (constamment décroissants) d'une

série divergente à termes positifs. Décrivons, d'un même point comme centre, des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots$ de rayons respectifs $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$, et, dans le cercle C_p, inscrivons un polygone régulier d'un nombre de côtés assez grand pour que chaque côté soit inférieur à la plus petite des différences $E_{p-1} - E_p$, $E_p - E_{p+1}$. Alors, si nous désignons par $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu, \ldots$ les sommets de ces différents polygones, rangés dans un ordre quelconque, toute ligne brisée assujettie à la condition de passer par tous ces points devra avoir une longueur supérieure à la somme des périmètres des polygones, laquelle croît indéfiniment.

Par contre, il peut se faire que, pour n'importe quel ordre assigné aux ξ, la série (3) soit absolument convergente. C'est ce qui aura lieu évidemment si la série $\sum(\xi - \xi_n)$ converge absolument, et dans ce cas seulement.

QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES ET LEURS APPLICATIONS A LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES TRANSCENDANTES

PAR

CARL STÖRMER

à CHRISTIANIA.

Dans plusieurs recherches des mathématiques modernes concernant la théorie des fonctions, la théorie des équations différentielles, même la géométrie et la mécanique on est souvent arrêté par des difficultés considérables provenant de questions d'une nature purement arithmétique qui paraissent au premier abord tout-à-fait étrangères au sujet.

Il est aisé d'en donner des exemples. Le plus célèbre est ce problème géométrique de la quadrature du cercle dont la solution définitive fut donnée en 1882 par la démonstration de la transcendance du nombre π, question d'une nature exclusivement arithmétique.

Pour en rappeler d'autres, citons le problème de la réduction des intégrales abéliennes, problème abordé par ABEL[1] et traité depuis par plusieurs des mathématiciens les plus célèbres, et dont l'importance est bien mise en évidence p. ex. dans les recherches modernes sur les équations différentielles. Ainsi on y revient[2] quand on cherche la condition pour que l'intégrale d'une équation différentielle algébrique du premier ordre

$$F(y', y) = 0$$

[1] Journal de Crelle, T. I., 1826.

[2] Voir PAINLEVÉ: *Cours professé à Stockholm*, p. 138—141.

où la variable x ne figure pas explicitement, soit une fonction de x à un nombre fini, *non donné* de déterminations. D'après M. PAINLEVÉ[1], ce problème est bien loin d'être résolu; on est arrêté ici par des obstacles insurmontables, dus à des questions d'une nature arithmétique et c'est seulement dans les cas très particuliers traités par TCHÉBYCHEFF[2] et ZOLOTAREFF[3], qu'on a réussi à en triompher.

De même la question de décider si une équation différentielle admet des solutions périodiques, question qui se pose p. ex. dans les recherches de la mécanique céleste (Problèmes des trois corps etc.) revient à des considérations analogues. Pour voir comment s'introduisent ici des recherches arithmétiques il suffit de renvoyer au mémoire de M. IVAR BENDIXSON: *Sur les équations différentielles à solutions périodiques*[4].

On doit à M. BOREL plusieurs exemples qui mettent en évidence le rôle que peuvent jouer les constantes d'une nature arithmétique particulière. Ainsi, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2u}{dx^2} - a^4\frac{d^2u}{dy^2} = f(x, y)$$

où $f(x, y)$ est une certaine fonction *analytique* de x et de y et où a est un nombre transcendant convenablement choisi, peut avoir cette propriété remarquable, qu'elle n'admet qu'une seule solution périodique u et cette solution est une fonction *non analytique*[5] de x et de y.

La théorie de la convergence des séries, p. ex. la théorie du développement des fonctions méromorphes en série de fonctions rationnelles, donne naissance à des considérations analogues[6].

En tout cas, l'étude des nombres incommensurables surtout au point de vue de leur transcendance forme une des branches les plus difficiles mais

---

[1] Voir l. c. p. 11 et 141.

[2] Journal de Liouville 1884.

[3] Bulletin des Sciences mathématiques 1879, p. 475—478.

[4] Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar 1896. Stockholm.

[5] Voir diverses notes de M. BOREL dans les *Comptes Rendus* 1895 et 1899, et aussi E. PICARD: *Sur le développement depuis un siècle de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique* Paris 1900, p. 22.

[6] Voir HADAMARD: *L'intermédiaire des mathématiciens* 1900, p. 32, et BOREL: *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes*, Annales de l'École Normale 1901, p. 234 etc.

aussi des plus attrayantes de l'arithmétique moderne. Dans ce qui suit nous allons donner une petite contribution à cette théorie en développant quelques propriétés arithmétiques des fonctions et des intégrales elliptiques.

1. Limite supérieure de l'expression $|\psi_n|$ dans la théorie de la fonction elliptique $\wp(u)$ de Weierstrass.

Considérons la fonction $\wp(u) = y$ de *Weierstrass,* définie par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 \tag{1}$$

avec la condition initiale $y = \infty$ pour $u = 0$.

Comme on le sait, la formule de multiplication de l'argument donne, pour n entier, $\wp(nu)$ comme fonction rationnelle aux coefficients commensurables de $\wp(u)$, g_2 et g_3. En effet, on a[1]

$$\wp(nu) - \wp(u) = -\frac{\psi_{n+1} \cdot \psi_{n-1}}{\psi_n^2} \tag{2}$$

où les expressions ψ sont définies par les relations récurrentes

$$\psi_{2n} = -\frac{\psi_n}{p'}\left[\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}^2\right]$$

$$\psi_{2n+1} = \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}^3 \tag{3}$$

jointes aux relations initiales

$$\psi_1 = 1\,, \quad \psi_2 = -p'$$

$$\psi_3 = 3p^4 - 6g_2' p^2 - 3g_3 p - g_2'^2$$

$$\psi_4 = -p'\left[2p^6 - 10g_2' p^4 - 10g_3 p^3 - 10g_2'^2 p^2 - 2g_2 g_3 p - g_3^2 - 2g_2'^3\right]$$

où nous avons mis pour abréger:

$$\wp(u) = p, \qquad \frac{d\wp(u)}{du} = p', \qquad \frac{g_2}{4} = g_2'.$$

On voit par ces formules que $\frac{\psi_{2n}}{p'}$ et ψ_{2n+1} sont des polynômes à coefficients *entiers* de p, g_2' et g_3.

---

[1] Voir p. ex. HALPHEN: *Traité des fonctions elliptiques* I, chapitre IV.

Supposons que $\wp$, g_2 et g_3 aient des valeurs finies données et cherchons une limite ***supérieure*** pour le module $|\psi_n|$ de ψ_n.

Appelons τ_n le plus grand des nombres

$$|\psi_1|, |\psi_2|, \ldots, |\psi_n|$$

et soit d'abord p' différent de zéro. Alors les formules (3) donnent immédiatement

$$
\begin{aligned}
|\psi_{2n+1}| &< 2 \cdot \tau_{n+2}^4 \quad < \lambda\tau_{n+2}^4 \\
|\psi_{2n}| &< \frac{2}{|p'|} \cdot \tau_{n+2}^4 < \lambda\tau_{n+2}^4 \\
|\psi_{2n-1}| &< 2\tau_{n+1}^4 \quad < \lambda\tau_{n+2}^4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

où λ est une constante indépendante de n. On en tire que $\tau_{2n+1} < \lambda\tau_{n+2}^4$, d'où en remplaçant n par $n + 1$ et en prenant les logarithmes népériens

(4) $$\log \tau_{2n+3} < \log \lambda + 4 \log \tau_{n+3}.$$

Dans le cas où $p' = 0$, tous les ψ_{2n} seront nuls et l'inégalité $|\psi_{2n+1}| < 2\tau_{n+2}^4$ conduit au même résultat.

Cela posé, soit

$$2^{m-1} + 3 < n \leqq 2^m + 3,$$

m étant entier positif. L'inégalité (4) donne successivement

$$
\begin{aligned}
\log \tau_{2^m+3} &< \log \lambda + 4 \log \tau_{2^{m-1}+3} \\
\log \tau_{2^{m-1}+3} &< \log \lambda + 4 \log \tau_{2^{m-2}+3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\log \tau_5 &< \log \lambda + 4 \log \tau_4 .
\end{aligned}
$$

En multipliant ces inégalités respectivement par $1, 4, 4^2, \ldots, 4^{m-1}$ et en ajoutant on obtient

$$\log \tau_{2^m+3} < \frac{4^m - 1}{3} \log \lambda + 4^m \log \tau_4 < K \cdot 2^{2m},$$

K étant indépendant de n.

Mais

$$\tau_n \overline{\overline{<}} \tau_{2^m+3}$$

et

$$2^{2m} < 4n^2$$

ce qui donne l'inégalité cherchée

(5) $$|\psi_n| \overline{\overline{<}} \tau_n < e^{an^2},$$

a étant une constante qui ne dépend que des valeurs données à p, g_2 et g_3 et non de n.

2. **Limites supérieures et inférieures de $|p(nu)|$, quand g_2, g_3 et $p(u)$ sont des nombres algébriques donnés.**

Supposons que g_2, g_3 et $\wp(u)$ soient des nombres algébriques donnés, racines d'équations algébriques à coefficients entiers. Comme on le sait[1], il est toujours possible d'assigner un nombre algébrique auxiliaire V tel que g_2, g_3 et $\wp(u)$ soient des fonctions rationnelles à coefficients entiers de V. Comme d'ailleurs tout nombre algébrique devient un nombre entier algébrique en le multipliant par un nombre entier convenable[2], on voit facilement qu'on peut supposer:

(6) $$\begin{cases} g_2' = \frac{g_2}{4} = \frac{1}{M}(M_0 + M_1\rho + M_2\rho^2 + \ldots + M_{r-1}\rho^{r-1}) \\ g_3 = \frac{1}{M}(M_0' + M_1'\rho + M_2'\rho^2 + \ldots + M_{r-1}'\rho^{r-1}) \\ \wp(u) = \frac{1}{M}(N_0 + N_1\rho + N_2\rho^2 + \ldots + N_{r-1}\rho^{r-1}) \end{cases}$$

où les $M_0, M_1 \ldots N_{r-1}$ sont des nombres entiers ou nuls, où M est un nombre entier positif et où ρ est un nombre entier algébrique racine d'une équation irréductible à coefficients entiers

(7) $$x^r + a_1x^{r-1} + a_2x^{r-2} + \ldots + a_{r-1}x + a_r = 0.$$

---

[1] Voir p. ex.: PICARD: *Traité d'Analyse* III, p. 436.

[2] Voir p. ex.: LEJEUNE-DIRICHLET: *Zahlentheorie* (1894), p. 525.

Reprenons la formule (2):

$$\wp(nu) = \frac{p\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2}.$$

D'après les propriétés connues des ψ_n, les fonctions $p\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}$ et ψ_n^2 sont des polynômes à coefficients *entiers* de p, g_2' et g_3, homogènes et de degré n^2 et $n^2 - 1$ respectivement en $p, g_2'^{\frac{1}{2}}$ et $g_3^{\frac{1}{3}}$. Par conséquent, si l'on introduit pour g_2', g_3 et p les expressions (6), les nombres

$$M^{n^2}[p\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}] = U_n$$

et

$$M^{n^2}.\psi_n^2 = V_n$$

seront des *nombres entiers algébriques* appartenant au corps algébrique construit sur la racine ρ de l'équation (7).

Cherchons des limites *supérieures* de $|U_n|$ et $|V_n|$. En appliquant l'inégalité (5) on voit tout de suite qu'on peut assigner un nombre positif λ indépendant de n et tel que

$$(8) \qquad \begin{cases} |U_n| < e^{\lambda n^2} \\ |V_n| < e^{\lambda n^2} \end{cases}$$

et cela quelqu'une des r racines ρ qu'on choisisse dans les expressions (6).

Il est facile d'en tirer des limites *inférieures* de $|U_n|$ et de $|V_n|$ dans les cas où ils ne sont pas nuls. En effet, supposons que U_n ne soit pas nul et désignons par $U_n^{(1)}, U_n^{(2)}, \ldots U_n^{(r-1)}$ ses r expressions conjuguées obtenues en substituant dans les expressions (6) pour ρ les $r - 1$ autres racines de l'équation (7). On aura

$$\frac{1}{U_n} = \frac{U_n^{(1)}.U_n^{(2)}\ldots U_n^{(r-1)}}{U_n.U_n^{(1)}\ldots U_n^{(r-1)}}.$$

Mais le dénominateur est la norme de U_n et comme U_n est un nombre entier algébrique différent de zéro, le module de ce norme sera $\geqq 1$[1]. En appliquant les inégalités (8) on aura donc

$$\left|\frac{1}{U_n}\right| < e^{(r-1)\lambda n^2}$$

[1] Voir p. ex. Dirichlet, *Zahlentheorie* (1894), p. 535.

c'est à dire

(9) $\left\{\begin{array}{l} \qquad |U_n| > e^{-\lambda' n^2} \\ \text{et de même, si } V_n \text{ n'est pas nul} \\ \qquad |V_n| > e^{-\lambda' n^2} \end{array}\right.$

λ' étant un nombre positif indépendant de n.

Comme

(10) $$\wp(nu) = \frac{U_n}{V_n}$$

on en tire immédiatement le résultat suivant:

Supposons que $\wp(u)$, g_2 et g_3 sont des nombres algébriques donnés. Alors, si $\wp(nu)$ n'est pas infini on aura

$$|\wp(nu)| < e^{\lambda n^2}$$

et si $\wp(nu)$ n'est pas nul, on aura

$$|p(nu)| > e^{-\lambda' n^2}$$

où λ et *λ' sont des constantes positives indépendantes de n.*

3. **Limites supérieures et inférieures du module d'une fonction algébrique de $\wp(n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)$.**

Le résultat trouvé dans la section précédente est susceptible d'une généralisation très étendue, que nous allons développer rapidement.

Soit $A(u)$ une fonction algébrique de $\wp(u)$, définie par une relation algébrique

(11) $$F_1(A(u), \wp(u)) = 0$$

où F_1 est un polynôme de $A(u)$ et de $p(u)$, dont les coefficients sont des nombres algébriques données. En éliminant ces coefficients entre l'équation (11) et les équations qui les définissent comme des nombres algébriques on en déduit une relation algébrique

(12) $$F_2(A(u), \wp(u)) = 0$$

où F_2 est un polynôme de $A(u)$ et de $\wp(u)$, dont les coefficients sont *des nombres entiers.*

Posons

$$u = n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sont des variables indépendantes, et où $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ sont entiers ou nuls (non nuls tous à la fois).

D'après le théorème d'addition de $\wp(u)$, il existe une relation algébrique à coefficients entiers entre $\wp(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu), g_2$ et g_3. Supposons que g_2 et g_3 soient des nombres algébriques donnés. En éliminant g_2 et g_3 entre la relation ci-dessus et les équations qui les définissent comme nombres algébriques on obtient une relation algébrique

$$(13) \qquad F_3(\wp(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)) = 0$$

où F_3 est un polynôme à coefficients entiers de $\wp(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$.

Enfin, l'élimination de $\wp(u)$ entre les équations (12) et (13) donne

$$(14) \qquad F(A(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)) = 0$$

où F est un polynôme *à coefficients entiers* de $A(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$, et où

$$u = n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu .$$

Les coefficients de F et son degré en chacune des variables $A(u)$, $\wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$ sont naturellement indépendants de $n_1, n_2, \ldots n_\nu$.

Cela posé, appliquons la formule de multiplication (2) et posons:

$$\wp(n_i u_i) = \frac{P_{n_i}(u_i)}{Q_{n_i}(u_i)}$$

où

$$\left. \begin{array}{l} P_{n_i}(u_i) = p\psi_{n_i}^2 - \psi_{n_i+1} \cdot \psi_{n_i-1} \\ Q_{n_i}(u_i) = \psi_{n_i}^2 \end{array} \right\} \text{pour } u = u_i .$$

En substituant ces valeurs et en chassant les dénominateurs $Q_{n_i}(u_i)$ l'équation (14) peut s'écrire:

$$(15) \qquad R_0 A(u)^q + R_1 A(u)^{q-1} + \ldots + R_q = 0$$

où les R sont des polynômes à coefficients entiers des quantités $P_{n_1}(u_1), Q_{n_1}(u_1), \ldots, P_{n_\nu}(u_\nu), Q_{n_\nu}(u_\nu)$.

Supposons maintenant qu'on donne aux variables $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ de telles valeurs que $\wp(u_1), \ldots, \wp(u_\nu)$ soient égaux à des nombres algébriques donnés. Comme il en est de même de g_2 et g_3 d'après l'hypothèse faite plus haut, on comprend qu'on peut supposer comme auparavant:

$$(16)\left\{\begin{aligned} g_2' = \frac{g_2}{4} &= \frac{1}{M}(M_0 + M_1\rho + \ldots + M_{r-1}\rho^{r-1}) \\ g_3 &= \frac{1}{M}(M_0' + M_1'\rho + \ldots + M_{r-1}'\rho^{r-1}) \\ \text{et} \quad \wp(u_i) &= \frac{1}{M}(N^{(i)} + N_1^{(i)}\rho + \ldots + N_{r-1}^{(i)}\rho^{r-1}) \\ &(i = 1, 2, 3, \ldots, \nu) \end{aligned}\right.$$

où les $M_0, M_1, \ldots, N_{r-1}^{(\nu)}$ sont des nombres entiers ou nuls, où M est entier positif et où ρ est un nombre entier algébrique racine d'une équation irréductible à coefficients entiers

$$x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r = 0.$$

Considérons une des branches de la fonction algébrique $A(u)$ et supposons qu'elle prend une valeur *finie* A, pour les valeurs de $g_2, g_3, \wp(u_1), \ldots, \wp(u_\nu)$ données plus haut. Cette valeur A sera racine de l'équation (15), quand on substitue pour $g_2, g_3, \wp(u_1)$ etc. les valeurs en question. Cherchons d'abord des limites supérieures et inférieures du module d'un coefficient quelconque R_s de cette équation.

En se rappelant la définition des R_s et en appliquant les résultats de la section précédente, on voit que

$$M^{\lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \ldots + \lambda_\nu n_\nu^2} . R_s$$

sera un nombre *entier* algébrique appartenant au corps algébrique construit sur la racine ρ, pourvu qu'on choisisse les nombres entiers λ, qui sont indépendants de $n_1, \ldots, n_\nu$, assez grands. En désignant par n^2 le plus grand des nombres $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$ on voit que

$$R_s' = M^{\lambda' n^2} . R_s \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, q)$$

sera entier algébrique, λ' étant un nombre entier indépendant de n et de s.

Cela posé, en appliquant les inégalités (8), on aura d'abord

(17) $$|R_s| < e^{\lambda n^2},$$

λ étant indépendant de n et de s, et si R_s n'est pas nul, on trouve comme auparavant pour le nombre entier algébrique R'_s que

$$|R'_s| > e^{-\mu' n^2}$$

c'est à dire

(18) $$|R_s| > e^{-\mu n^2},$$

μ étant indépendant de n et de s.

Cela fait, il est facile de trouver une limite supérieure de $|A|$. En effet, comme A, qui est supposé fini, est racine de l'équation (15), il faut que l'un des coefficients $R_0, R_1, \ldots, R_{q-1}$ soit différent de zero; soit R_μ le premier de ces coefficients qui n'est pas nul.

Alors une formule connue[1] donne

$$|A| < 1 + \frac{R}{|R_\mu|}$$

où R est le plus grand des nombres $|R_0|, \ldots, |R_q|$. En appliquant les inégalités (17) et (18) on en déduit

$$|A| < e^{Kn^2},$$

K étant indépendant de n.

Dans le cas où A n'est pas nul, on trouve de la même manière pour $|A|$ une limite inférieure de la forme $e^{-K'n^2}$, K' étant indépendant de n.

Nous avons ainsi le théorème:

Théorème 1.

Soit $\wp(u)$ la fonction elliptique de Weierstrass construite avec des invariants g_2 et g_3 qui sont des nombres algébriques donnés, et soit $A(u)$ une fonction algébrique de $\wp(u)$, liée à celle-là par une équation algébrique

$$F(A(u), \wp(u)) = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres algébriques.

[1] Voir p. ex. SERRET: *Cours d'Algèbre supérieure* I, chapitre III.

Enfin soient $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ *des valeurs de* u *telles que* $\wp(u_1), \wp(u_2), \ldots, \wp(u_\nu)$ *ont des valeurs algébriques (finies) données, et soient* $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ *des nombres entiers, qui ne sont pas tous nuls; désignons enfin par* n^2 *le plus grand des nombres* $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$.

Cela posé, si $A(n_1u_1 + \ldots + n_\nu u_\nu)$ *n'est pas infini on aura*

$$(19) \qquad |A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)| < e^{\lambda n^2}$$

et si cette quantité n'est pas nulle, on aura

$$(20) \qquad |A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)| > e^{-\lambda' n^2}$$

où λ *et* λ' *sont des constantes positives indépendantes de* n[1].

Comme on le sait, *toute fonction analytique qui possède un théorème d'addition algébrique, est une fonction algébrique de la fonction* $\wp(u)$, *correspondant à des invariants* g_2, g_3 *convenablement choisis.* On conçoit alors comment le théorème I peut être appliqué à de telles fonctions.

Dans le cas beaucoup plus simple où $A(u)$ est une fonction algébrique de sin u, cas qui peut être regardé comme cas particulier du cas général, la même méthode donne aisément le résultat plus simple:

Soit $A(u)$ *une fonction algébrique de sin* u, *liée à cette fonction par une équation algébrique dont les coefficients sont des nombres algébriques donnés. Soient de plus* $u_1, \ldots, u_\nu$ *des valeurs de* u, *telles que* $\sin u_1, \sin u_2, \ldots, \sin u_\nu$ *sont égaux à des nombres algébriques donnés. Enfin, soient* $n_1, \ldots, n_\nu$ *des nombres entiers non tous nuls et désignons par* n *le plus grand des nombres* $|n_1|, |n_2|, \ldots, |n_\nu|$.

Alors, si $A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)$ *n'est pas infini, on aura*

$$(21) \qquad |A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots n_\nu u_\nu)| < e^{\lambda n}$$

---

[1] On pourrait sans doute appliquer ce théorème aux recherches arithmétiques des courbes algébriques, commencées par M. Poincaré. (Journal des Mathématiques pures et appliquées, 1901).

et si cette quantité n'est pas nulle, on aura

(22) $$|A(n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)| > e^{-\lambda' n}$$

où λ *et* λ' *sont des constantes indépendantes de* n.

4. Application aux intégrales elliptiques et abéliennes.

Considérons l'intégrale elliptique correspondant à $z = \wp(u)$:

$$u = \int_z^\infty \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un chemin d'intégration allant du point z a l'infini et évitant les points critiques, racines de l'équation $4y^3 - g_2 y - g_3 = 0$. Supposons de plus que le chemin d'intégration n'entoure ces points critiques qu'un nombre fini de fois.

Alors, comme on le sait, l'intégrale sera *finie* pour toutes les valeurs de z.

D'un autre côté, $u = 0$ est un pôle de second ordre pour la fonction $\wp(u)$, et dans le voisinage de $u = 0$, on aura

$$z = \frac{1}{u^2} + E_u,$$

E_u tendant vers zéro avec u. On en tire

(23) $$u = \frac{1}{\sqrt{z}}(1 + E'_u) = \frac{1}{\sqrt{\wp(u)}}(1 + E'_u)$$

où E'_u tend vers zéro avec u, et où la racine carrée est choisie avec une détermination convenable.

Cela posé, supposons que g_2 et g_3 soient des nombres algébriques donnés ainsi que $z_1, z'_1, z_2, z'_2, \ldots, z_\nu, z'_\nu$, et considérons la somme

$$U = n_1 \cdot \int_{z_1}^{z'_1} \frac{dz}{\sqrt{R}} + n_2 \int_{z_2}^{z'_2} \frac{dz}{\sqrt{R}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z'_\nu} \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

où $R = 4z^3 - g_2 z - g_3$.

En posant

$$u_i = \int_{z_i}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{R}}, \qquad u_i' = \int_{z_i'}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

on aura

$$U = n_1 u_1 - n_1 u_1' + \ldots + n_\nu u_\nu - n_\nu u_\nu' .$$

Supposons que $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ soient des nombres entiers, non tous nuls, et soit n^2 la plus grande des quantités $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$. Cherchons une limite inférieure de $|U|$ dans le cas où U n'est pas nul. Alors pour U assez petit, on aura d'après l'équation (23):

$$|U| > \frac{K}{|\wp(U)|^{\frac{1}{2}}},$$

K étant une constante finie > 0.

Mais en choisissant dans le théorème 1, $A(u) = \wp(u)$ on a

$$|\wp(n_1 u_1 - n_1 u_1' + \ldots + n_\nu u_\nu - n_\nu u_\nu')| < e^{\lambda n^2}$$

ce qui donne

$$|U| > K e^{-\frac{\lambda}{2} n^2}$$

et nous avons ainsi démontré le théorème:

Théorème 2.

Soient $g_2, g_3, z_1, z_1', z_2, z_2', \ldots, z_\nu, z_\nu'$ des nombres algébriques donnés, parmi lesquels un ou plusieurs des nombres $z_1', z_2', \ldots, z_\nu'$ peuvent être infinis, et soit

$$R = 4z^3 - g_2 z - g_3 .$$

Considérons la somme

$$n_1 \int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + n_2 \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z_\nu'} \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ *sont des nombres entiers. Si cette somme n'est pas nulle, on aura*

$$(24) \qquad \left| n_1 \int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + n_2 \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z_\nu'} \frac{dz}{\sqrt{R}} \right| > e^{-\lambda n^2}$$

où n^2 *désigne le plus grand des nombres* $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$ *et où* λ *est indépendant de* n.

En appliquant le théorème correspondant sur la fonction sin u, on obtient de même le

Théorème 3.

Soient $z_1, z_1', z_2, z_2', \ldots, z_\nu, z_\nu'$ *des nombres algébriques, et soient* $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ *des nombres entiers. Alors*

$$(25) \qquad \left| n_1 \int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + n_2 \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z_\nu'} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right| > e^{-\lambda n}$$

s'il n'est pas nul; n *désigne le plus grand des nombres* $|n_1|, |n_2|, \ldots, |n_\nu|$ *et* λ *est indépendant de* n.

En appliquant le théorème général I on pourrait étendre ces théorèmes aux *intégrales abéliennes dont la fonction inverse admet un théorème d'addition algébrique.* Comme une fonction analytique admettant un théorème d'addition algébrique n'aura qu'un nombre fini de déterminations dans tout le plan et comme elle est liée avec sa dérivée par une équation algébrique à coefficients constants, on voit quelle liaison intéressante il y a entre ces questions et le problème sur l'équation différentielle algébrique

$$F(y', y) = 0$$

dont nous avons parlé dans l'introduction.

Cependant, nous omettons ici ces recherches, qui nous entraîneraient trop loin.

Des théorèmes 2 et 3 on peut tirer des conséquences intéressantes pour de grandes classes de nombres incommensurables.

On en tire en effet:

Corollaire 1:

Soit α un nombre réel et incommensurable défini comme rapport de deux intégrales elliptiques:

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}}{\displaystyle\int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}}$$

où $g_2, g_3, z_1, z_1', z_2, z_2'$ sont des nombres algébriques donnés, $z_1' = \infty$ et $z_2' = \infty$ y compris. Soient de plus n_1 et n_2 deux nombres entiers qui ne sont pas nuls tous les deux et désignons par n^2 le plus grand de leurs carrés n_1^2 et n_2^2.

Alors on aura

$$|n_1\alpha - n_2| > e^{-\lambda n^2} \tag{26}$$

λ étant une constante indépendante de n.

La même inégalité subsiste si

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}}{\displaystyle\int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}}$$

z_1, z_1', z_2, z_2' et k étant des nombres algébriques.

Du théorème 3 on tire de la même manière:

Corollaire 2:

Si α est un nombre réel et incommensurable défini comme le rapport entre deux arcs dont les sinus sont des nombres algébriques donnés, on a,

n_1 et n_2 étant des nombres entiers non nuls tous les deux et n désignant le plus grand des modules $|n_1|$ et $|n_2|$, que

$$(27) \qquad |n_1\alpha - n_2| > e^{-\lambda n},$$

λ étant une constante indépendante de n.

On en tire aisément que la même inégalité subsiste quand α est le rapport entre deux logarithmes de nombres algébriques, en particulier si α est le logarithme vulgaire d'un nombre algébrique[1].

En général, on pourrait étendre les résultats des deux corollaires à toutes les intégrales *abéliennes* définies plus haut.

Dans cet ordre d'idées, rappelons le résultat dû à LIOUVILLE[2], que si α est un nombre réel racine d'une équation irréductible de degré r ($r > 1$) à coefficients entiers, on a l'inégalité

$$(28) \qquad |n_1\alpha - n_2| > \frac{\lambda}{n^{r-1}},$$

$n (> 0)$ désignant le plus grand des modules des nombres entiers n_1 et n_2 et λ étant indépendant de n.

D'après les indications de M. BOREL[3], il sera possible d'établir des inégalités analogues quand α est racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des polynômes à coefficients entiers en e ou bien en e^ρ, ρ étant algébrique. De même, si α est le logarithme népérien d'un nombre algébrique p. ex. si $\alpha = \pi$ etc.[4]

Les inégalités (26) et (27) donnent tout de suite des théorèmes analogues sur le développement de α en fraction continue

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots \cfrac{1}{+ a_n + \ldots}}}$$

[1] Voir mon mémoire: *Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques.* Bulletin de la Société Mathématique de France 1900.

[2] Voir p. ex. BOREL: *Leçons sur la Théorie des Fonctions,* p. 27.

[3] Voir les Comptes Rendus, 6 mars 1899 et le mémoire précédemment cité, dans les Annales de l'École Normale 1901, p. 236.

[4] Voir aussi diverses notes de M. E. MAILLET dans les Comptes Rendus, 1900—1901.

En effet, en posant

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}} + \dots$$

et

$$P_1 = a_0 \,, \qquad P_2 = a_1 a_0 + 1 \,, \quad \dots \,, \quad P_n = a_{n-1} P_{n-1} + P_{n-2} \,, \quad \dots$$

$$Q_1 = 1 \,, \qquad Q_2 = a_1 \qquad \,, \quad \dots \,, \quad Q_n = a_{n-1} Q_{n-1} + Q_{n-2} \,, \quad \dots$$

on a comme on le sait:

$$a_n < \alpha_n + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} = \frac{1}{Q_n \,|\, Q_n \alpha - P_n \,|} \,.$$

On en déduit que si le nombre incommensurable α est 1° *racine d'une équation irréductible de degré r à coefficients entiers,* ou 2° *défini par le corollaire* 2 ou bien 3° *défini par le corollaire* 1, on a respectivement les inégalités suivantes, dont la première est due à LIOUVILLE[1]:

$$a_n < \lambda Q_n^{r-2} \,, \qquad a_n < e^{\lambda' Q_n} \quad \text{et} \quad a_n < e^{\lambda'' Q_n^2}$$

λ, λ' et λ'' étant des constantes indépendantes de n. On en tire pour les nombres transcendants des conséquences analogues à celles dans mon mémoire précédemment cité[2].

5. Application à la théorie des fonctions entières transcendantes à distribution ordinaire des zéros.

Dans un mémoire récent[3], M. BOREL a introduit pour les fonctions entières transcendantes une notation importante. Soit $F(z)$ une telle fonction, de genre fini, et soient $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ses zéros, pour plus de simplicité supposés simples et rangés dans l'ordre des modules croissants.

Soit ρ *l'ordre réel* de la fonction $F(z)$, c'est à dire un nombre positif tel que la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\epsilon}}$$

[1] Journal de Liouville t. XVI.

[2] Voir l. c. p. 156.

[3] *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes.* Annales de l'École Normale 1901, p. 221 etc.

est convergente, tandis que la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$$

est divergente quelque petit que soit ε.

Posons pour abréger $|a_n| = r_n$. Alors M. BOREL dit, par définition, que la distribution des zéros est *ordinaire*, si l'on a

$$|F'(a_n)| > e^{-r_n^{\rho+\varepsilon}} \tag{29}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, à partir du moins d'une certaine valeur de n[1]. Dans le cas où une telle inégalité n'aura pas lieu, la distribution est dite *extraordinaire*.

D'après M. BOREL la distribution des zéros est ordinaire pour toutes les fonctions entières usuelles. Cependant la fonction très simple $\sin \pi z \,.\, \sin \alpha\pi z$ aura une distribution ordinaire ou extraordinaire selon *la nature arithmétique de la constante* α, comme il le fait voir par des exemples.

Nous nous permettons de citer les passages suivants qui terminent le mémoire de M. BOREL et qui mettent en évidence l'utilité des recherches arithmétiques pour ce genre de questions:

»Parmi les sujets de recherches suggérés naturellement par ce qui précède il en est un sur lequel je n'insisterai pas, à cause de sa difficulté: la distribution des zéros est-elle ordinaire pour le produit de fonctions usuelles, par exemple pour le produit de deux fonctions σ correspondant toutes les deux à des invariantes g_2 et g_3 qui soient des nombres rationnels ou algébriques?»

Nous allons appliquer les résultats précédents pour aborder du moins des cas assez généraux de ce dernier problème.

Considérons en effet la fonction

$$F(z) = \sigma_{(1)}(z) \,.\, \sigma_{(2)}(z)$$

où nous avons posé:

$$\sigma_{(1)}(z) = \sigma(z \mid \omega_1, \omega_1')$$

$$\sigma_{(2)}(z) = \sigma(z \mid \omega_2, \omega_2')$$

[1] Dans le cas, où a_n est un zéro de multiplicité m, on aura seulement à remplacer dans l'inégalité $F'(a_n)$ par $F^{(m)}(a_n)$. (BOREL).

la fonction entière transcendante σ de M. WEIERSTRASS étant définie comme d'ordinaire[1].

Pour plus de simplicité supposons que

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \beta$$

soient réels.

Nous allons trouver des conditions suffisantes pour que la distribution des zéros de la fonction $F(z)$ soit *ordinaire*. Comme nous allons le voir, ces conditions s'expriment exclusivement par *des propriétés arithmétiques des nombres α et β.*

Comme tous les zéros de la fonction σ sont simples, les zéros de $F(z)$ seront simples s'ils ne sont pas communs à $\sigma_{(1)}(z)$ et $\sigma_{(2)}(z)$ et doubles dans le cas contraire. Par conséquent, on aura pour un zéro simple $z = a$:

$$(30,1) \qquad F'(a) = \sigma_{(1)}'(a) \, . \, \sigma_{(2)}(a) \quad \text{ou bien} = \sigma_{(1)}(a)\sigma_{(2)}'(a)$$

et pour un zéro double

$$(30,2) \qquad F''(a) = 2\sigma_{(1)}'(a) \, . \, \sigma_{(2)}'(a).$$

Considérons d'abord la fonction $\sigma_{(1)}(z)$. On a comme on le sait:

$$(31) \qquad \sigma_{(1)}(z + 2\tilde{\omega}_1) = \pm e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 + 2\tilde{\eta}_1 z} \, . \, \sigma_{(1)}(z)$$

en posant

$$(32) \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_1 = m_1\omega_1 + n_1\omega_1' \\ \tilde{\eta}_1 = m_1\eta_1 + n_1\eta_1' \end{cases}$$

où η_1 et η_1' sont les valeurs de la dérivée logarithmique de $\sigma_{(1)}(z)$ pour $z = \omega_1$ et $z = \omega_1'$ respectivement, et où m_1 et n_1 sont entiers ou nuls. Comme on le sait tous les zéros de $\sigma_{(1)}(z)$ s'obtiennent en donnant à m_1 et n_1 toutes les valeurs entières ou nulles. On en tire, puisque $\sigma_{(1)}'(0) = 1$, que

$$\sigma_{(1)}'(2\tilde{\omega}_1) = \pm e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1}.$$

Posons $2\tilde{\omega}_1 = \mu + i\nu$, μ et ν étant réels, d'où $|2\tilde{\omega}_1|^2 = \mu^2 + \nu^2$. En substituant pour $2\tilde{\omega}_1$, sa valeur tirée de (32) et en remarquant que $\frac{\omega_1'}{\omega_1}$ a

[1] Voir p. ex. HALPHEN: *Traité des fonctions elliptiques* I, p. 378.

sa partie purement imaginaire différente de zéro, on voit qu'on peut trouver pour m_1 et n_1 des expressions

$$(33)\qquad \begin{cases} m_1 = p\mu + q\nu, \\ n_1 = p'\mu + q'\nu \end{cases}$$

p, q, p' et q' étant finis.

Considérons maintenant $2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1$. En y substituant les valeurs de $\tilde{\eta}_1$ et $\tilde{\omega}_1$ tirées des équations (32) et en appliquant les relations (33) on voit que la partie réelle de $2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1$ aura la forme $A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2$, A, B et C étant indépendants de μ et de ν et finis. Comme d'autre part le quotient:

$$\frac{|A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2|}{|2\varpi_1|^2} = \left|\frac{A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2}{\mu^2 + \nu^2}\right|$$

pour toutes les valeurs réelles de μ et ν ne surpasse pas une quantité fixe, on aura

$$(34)\qquad |\sigma'_{(1)}(2\tilde{\omega}_1)| = e^{A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2} > e^{-K_1 \cdot |2\tilde{\omega}_1|^2},$$

K_1 désignant un nombre fixe indépendant du zéro $2\varpi_1$ choisi[1].

De la même manière on trouve, si $2\varpi_2$ désigne un zéro de $\sigma_{(2)}(z)$:

$$(35)\qquad |\sigma'_{(2)}(2\tilde{\omega}_2)| > e^{-K_2 \cdot |2\tilde{\omega}_2|^2},$$

K_2 étant indépendant du zéro $2\tilde{\omega}_2$ choisi.

On en tire immédiatement que *la distribution des zéros doubles de $F(z)$ est ordinaire.* En effet soit $a_n = 2\tilde{\omega}_1 = 2\tilde{\omega}_2$ un zéro double et posons $|a_n| = r_n$ alors la formule (30,2) donne

$$|F''(a_n)| > e^{-Kr_n^2} > e^{-r_n^{2+\varepsilon}}$$

quelque petit que soit ε, du moins à partir d'une certaine valeur de n. Comme d'autre part l'ordre réel de $F(z)$ est égal à l'ordre réel de σ, c'est à dire à 2, l'énoncé se trouve démontré.

Considérons maintenant les zéros simples et cherchons une limite inférieure des modules $|\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)|$ et $|\sigma_{(2)}(2\tilde{\omega}_1)|$. Prenons la fonction $\sigma_{(1)}(z)$ et posons

$$2\tilde{\omega}_2 = 2m_2\omega_2 + 2n_2\omega'_2 = 2m_1\omega_1 + 2n_1\omega'_1 + \varepsilon$$

[1] On tire de l'inégalité (34) le résultat indiqué par M. Borel, que la distribution des zéros de la fonction σ est ordinaire.

où m_1, m_2, n_1 et n_2 sont entiers ou nuls et où ε est différent de zéro parceque $2\tilde{\omega}_2$ est supposé zéro simple de $F(z)$. Introduisons les notations

(36)
$$\begin{cases} m_2 \dfrac{\omega_2}{\omega_1} - m_1 = m_2\alpha - m_1 = \varepsilon_m \\ n_2 \dfrac{\omega_2'}{\omega_1'} - n_1 = n_2\beta - n_1 = \varepsilon_n, \end{cases}$$

ce qui donne:

$$\varepsilon = 2\omega_1\varepsilon_m + 2\omega_1'\varepsilon_n.$$

La formule (31) nous donne

$$\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2) = \pm e^{2\eta_1\tilde{\omega}_1 + 2\eta_1\varepsilon}.\sigma_{(1)}(\varepsilon).$$

Or, α et β étant supposés réels, les nombres entiers m_1 et n_1 peuvent être choisis tels que $|\varepsilon_m|$ et $|\varepsilon_n|$ ne surpassent pas $\frac{1}{2}$. Par conséquent le point ε ne sortira pas du parallélogramme dont les sommets sont les points $\pm\omega_1 \pm \omega_1'$ et par suite on peut écrire:

$$\sigma_{(1)}(\varepsilon) > M.|\varepsilon|,$$

M étant une constante indépendante de ε.

D'un autre côté, $\frac{\omega_1'}{\omega}$ ayant sa partie purement imaginaire différente de zéro, on voit aisément que

$$|\varepsilon| > M'.\varepsilon',$$

où M' est indépendant de ε et où ε' désigne *la plus grande* des quantités $|\varepsilon_m|$ et $|\varepsilon_n|$.

Enfin en tenant compte des relations (33) et (36) on trouve comme auparavant

$$|e^{2\eta_1\tilde{\omega}_1 + 2\eta_1\varepsilon}| > e^{-K'.|2\tilde{\omega}_2|^2},$$

K' étant indépendant du zéro $2\tilde{\omega}_2$ choisi.

En résumant ces résultats, il vient

(37)
$$|\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)| > e^{-H_1.|2\tilde{\omega}_2|^2}.\varepsilon',$$

H_1 étant une constante indépendante du zéro $2\tilde{\omega}_2$ choisi.

Nous aurons à discuter trois cas différents:

1°. *α et β sont commensurables tous les deux.*

Alors $|\varepsilon_m|$ et $|\varepsilon_n|$ sont nuls ou plus grands qu'un nombre fixe. Comme $2\tilde{\omega}_2$ est supposé zéro simple de $F(z)$, ils ne sont pas nuls tous les deux et par conséquent ε' sera plus grand qu'un nombre fixe μ_1 et

$$|\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)| > \mu_1 \,.\, e^{-H_1 \cdot |2\tilde{\omega}_2|^2}$$

et de même on trouve

$$|\sigma_{(2)}(2\tilde{\omega}_1)| > \mu_2 \,.\, e^{-H_2 \cdot |2\tilde{\omega}_1|^2}$$

si $2\tilde{\omega}_1$ est un zéro simple de $F(z)$ appartenant à $\sigma_{(1)}(z)$. En combinant ces inégalités avec les inégalités (34) et (35) on aura, si a_n est un zéro simple de $F(z)$ que

$$|F'(a_n)| > e^{-r_n^{2+\varepsilon}}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, du moins à partir d'une certaine valeur de n.

Dans ce cas, la distribution des zéros de $F(z)$ sera par conséquent ordinaire.

2°. *L'un des nombres α, β, p. ex. β est commensurable, l'autre incommensurable.*

Supposons que le nombre incommensurable α satisfasse à la condition

$$|m_2\alpha - m_1| > e^{-\theta(m)}$$

où m est le plus grand des nombres $|m_1|$ et $|m_2|$ et où $\theta(m)$ est une fonction positive non décroissante de $m (m > 0)$. Comme ε_n peut être nul on aura en tout cas

$$\varepsilon' > e^{-\theta(m)}.$$

D'un autre côté, les formules (32), (33) et (36) font voir que le rapport $\frac{m}{|2\tilde{\omega}_2|}$ ne surpasse pas une limite fixe λ de manière que

$$\theta(m) < \theta(\lambda r)$$

en désignant $|2\tilde{\omega}_2|$ par r. Cela donne

$$|\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)| > e^{-H_1 r^2 - \theta(\lambda r)}$$

et pour $\sigma_{(2)}(2\tilde{\omega}_1)$ une inégalité pareille. Par conséquent si $\theta(m) < Am^2$ où A est une constante positive, on voit en combinant ces inégalités avec les inégalités (34) et (35) que la fonction $F(z)$ aura une distribution ordinaire de ses zéros.

3°. *Enfin soient α et β incommensurables tous les deux,* et soit $\theta_1(m)$ et $\theta_2(m)$ les fonctions correspondantes, de manière que

$$|m_2\alpha - m_1| > e^{-\theta_1(m)}$$
$$|m_2\beta - m_1| > e^{-\theta_2(m)}.$$

Alors on trouve sans difficulté que $F(z)$ aura une distribution ordinaire des zéros, si l'une des fonctions $\theta(m) < Am^2$, A étant une constante positive.

Par ces calculs, qui sont très simples en principe mais qui ont exigé des développements peut-être fatigants, nous sommes arrivés au théorème suivant:

Théorème 4.

Considérons le produit de deux fonctions σ de Weierstrass

$$F(z) = \sigma(z \mid \omega_1, \omega_1') . \sigma(z \mid \omega_2, \omega_2')$$

où les rapports

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha \quad et \quad \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \beta$$

sont supposés réels et finis.

La distribution des zéros de $F(z)$ sera ordinaire:

A. *Si α et β sont commensurables.*

B. *Si l'un des nombres α, β, p. ex. β est commensurable et l'autre α incommensurable de manière que*

(38) $$|n_1\alpha - n_2| > e^{-\lambda n^2}$$

pour toutes les valeurs entières n_1, n_2 qui ne sont pas nuls à la fois, n désignant le plus grand des nombres $|n_1|$ et $|n_2|$ et λ désignant un nombre indépendant de n.

C. *Si α et β sont incommensurables tous les deux et l'un d'eux, p. ex. α, satisfait à l'inégalité* (38).

En appliquant les résultats des sections précédentes on aura ainsi le

Corollaire 3:

La distribution des zéros de la fonction $F(z)$ sera ordinaire, si l'un des nombres α, β, p. ex. α est incommensurable et

1° *égal à un nombre algébrique,*

2° *égal au rapport de deux logarithmes de nombres algébriques, en particulier égal au logarithme vulgaire d'un nombre algébrique,*

3° *égal au rapport de deux arcs dont les sinus ou les tangentes sont algébriques,*

4° *égal au rapport de deux intégrales elliptiques*

$$\int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \qquad \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

z_1, z_1', z_2, z_2', g_2 et g_3 étant des nombres algébriques, parmi lesquels z_1' et z_2' peuvent aussi être infinis.

Les cas 2° et 3° peuvent être regardés comme cas particuliers du cas 4°. En appliquant un résultat dû à HERMITE sur la fonction exponentielle[1], j'ai pu suppléer les cas précédents par les suivants

5° *égal au logarithme népérien d'un nombre commensurable,*

6° *égal à e^ρ, ρ étant commensurable;*

cependant, cela m'entraînerait trop loin d'en donner les démonstrations. En appliquant les recherches bien connues sur la fonction exponentielle de HERMITE, de LINDEMANN et d'autres et en suivant un procédé indiqué par M. BOREL[2] on arriverait sans doute à compléter les cas 5° et 6° par d'autres cas très généraux.

On voit nettement ici quel rôle joue la nature arithmétique des constantes α et β.

---

[1] *Cours lithographié*, IV[e] édition, p. 73.

[2] Comptes Rendus, 6 mars 1899.

ON THE INTEGRATION OF SERIES

BY

E. W. HOBSON

of CAMBRIDGE (England).

Since ABEL's researches in the theory of infinite series, some of the most important investigations on the subject have been concerned with the uniformity and non-uniformity of the convergence of such series. It was first pointed out by SEIDEL, and by STOKES independently, that a discontinuity in the sum of a convergent series, of which the terms are continuous functions of a real variable, is due to the non-uniform convergence of the series in the neighbourhood of points at which such discontinuity exists. It is further known that non-uniformity in the convergence of such a series does not necessarily involve discontinuity in the sum. The theory is of special importance in connection with the question regarding the conditions under which the series may be integrated term by term so that the series arising from such integration may have for its sum the integral of the sum of the original series.

If

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

is a series which converges everywhere in an interval (a, b) of the real variable x, and if $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x) \ldots$ are each continuous throughout the interval, it is well known that a sufficient condition that the sum of the integrals of the terms of the series taken through (a, b), or through an interval which is part of (a, b), may be represented by the integral of the sum-function $s(x)$ taken through the same interval, is that the series be uniformly convergent through the interval of integration. It

has been, however, shewn by OSGOOD,[1] that in the case in which the sum-function $s(x)$ is continuous through the interval (x_0, x_1) of integration, a sufficient condition for term by term integration is that there should be in the interval (x_0, x_1) no point at which the measure of non-uniform convergence is indefinitely great.

It has been shewn by BAIRE[2] that the sum-function $s(x)$ is at most a point-wise discontinuous function. In the present communication the properties of the remainder-function $R_n(x) = s(x) - s_n(x)$, are considered on the lines of BAIRE's memoir, and the results are applied to prove that for the most general function $s(x)$ which is the sum of a series of the above type, the series may be integrated term by term and gives a series of which the sum is the integral of $s(x)$, provided (1) that $s(x)$ is integrable through the interval of integration, and (2) that in that interval there is no point at which the measure of non-uniform convergence is indefinitely great.

If $n = \frac{1}{y}$, we may consider $s_n(x)$, $R_n(x)$ as functions of x and y, defined for all values of x in the interval (a, b), and for values of y which are the reciprocals of any positive integer m. Following BAIRE's procedure, the functions may be defined for values of y intermediate between the values $y_m = \frac{1}{m}$, and $y_{m+1} = \frac{1}{m+1}$, so that writing $s(x, y)$, $R(x, y)$ for $s_n(x)$, $R_n(x)$,

$$s(x, y) = \frac{y - y_m}{y_{m+1} - y_m} s(x, y_{m+1}) + \frac{y_{m+1} - y}{y_{m+1} - y_m} s(x, y_m)$$

$$R(x, y) = \frac{y - y_m}{y_{m+1} - y_m} R(x, y_{m+1}) + \frac{y_{m+1} - y}{y_{m+1} - y_m} R(x, y_m).$$

If we further define $s(x, 0)$, $R(x, 0)$ to be $s(x)$, and zero respectively, the two functions $s(x, y)$, $R(x, y)$ are defined for every point inside and on the boundary of the rectangle contained by the four straight lines $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = 1$.

The function $s(x, y)$ is everywhere continuous with regard to y, and is continuous with respect to x, everywhere except upon the bound-

[1] American Journal of Mathematics, Vol. XIX, 1897.
[2] See Annali di Math. (3) III, 1899.

ary $y = 0$. BAIRE has shewn that this function is at most a point-wise discontinuous function with respect to (x, y), on any continuous curve within the rectangle, and in particular on the boundary $y = 0$. We shall here consider the function $R(x, y)$, which does not come under BAIRE's general case, as although it is everywhere continuous with regard to y, it is in general a point-wise discontinuous function of x, for any constant value of y between 0 and 1, the value $y = 0$ excepted, for which the function vanishes.

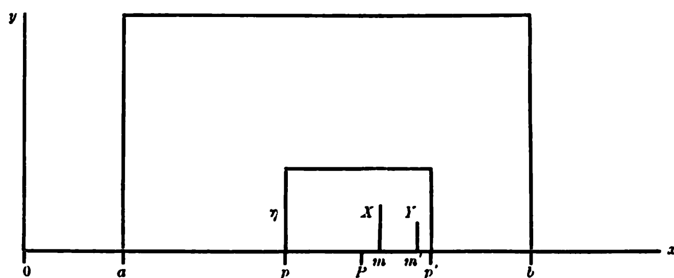
At any point $P(x, y)$, let a straight line of length 2ρ be drawn with P as middle point, and parallel to the y axis, and let $\omega(\rho)$ be the fluctuation (Schwankung) of the function $R(x, y)$ in the line 2ρ; the function $\omega(\rho)$ is a continuous function of ρ, and corresponding to an arbitrarily assigned positive number σ, let $\alpha_\sigma(x, y)$ be the upper limit of the values of ρ which are such that $\omega(\rho) \leqq \sigma$; if P is in the boundary $y = 0$, it will be sufficient to take the straight line of length ρ within the rectangle. The function $\alpha_\sigma(x, y)$ is thus defined for every point in the rectangle and is an essentially positive function. Moreover since $R(x, y) = s(x) - s(x, y)$, and since $s(x)$ is independent of y, the function $\alpha_\sigma(x, y)$ is the same as the corresponding function introduced by BAIRE for the function $s(x, y)$.

It has been shewn by BAIRE that $\alpha_\sigma(x, y)$ is a semi-continuous function, that is, that corresponding to an arbitrarily assigned positive number ε, a neighbourhood of the point P can be found such that for all points P' in this neighbourhood $\alpha_\sigma(P') < \alpha_\sigma(P) + \varepsilon$.

If P be a point $(x, 0)$ in the boundary $y = 0$, and a semi-circle of radius ρ, and centre P, be drawn within the rectangle, the lower limit of $|R(x, y)|$ in this semi-circle is zero, and the upper limit may be denoted by $\beta(\rho)$. The limit of $\beta(\rho)$ when ρ is indefinitely diminished may be called the measure of the non-uniform convergence of the given series at the point P; if this limit is zero, the convergence of the series at P is uniform. If we divided the semi-circle into quadrants by means of a radius, the limits when $\rho = 0$, of the upper limits of $|R(x, y)|$ in the two quadrants, may be called the measures of non-uniform convergence at P, on the right and on the left, respectively; these two measures are equivalent to OSGOOD's indices of the point P, of which he gives a different definition. The measure of non-uniform convergence of the given

series is in accordance with the above definition, the saltus (Sprung) of the function $|R(x, y)|$ at the point $P(x, o)$ with respect to the continuum (x, y).

The minimum of $\alpha_\sigma(x, y)$ at the point $P(x, o)$, of the boundary $y = o$, with respect to that boundary, is the limit when δ diminishes to zero, of the lower limit of α_σ in the neighbourhood $(x - \delta, x + \delta)$ of the point P. If this minimum at the point P is positive, a neighbourhood of P in the continuum (x, y) can be found, such that the fluctuation (Schwankung) of $R(x, y)$ in that neighbourhood is $\leqq 2\sigma$, and hence the saltus of $|R(x, y)|$ at P is $\leqq 2\sigma$. To prove this we observe that a neighbourhood pp' of P can be found such that β_σ at every point in pp'



is greater than a fixed number η which is less than the minimum of β_σ at P. Let X, Y be any two points in the rectangle whose base is pp' and height η, and let Xm, Ym' be perpendicular to the boundary. We have then

$$|R(X) - R(Y)| \leqq |R(X) - R(m)| + |R(Y) - R(m')|$$
$$\leqq 2\sigma$$

thus the required neighbourhood has been found.

It follows that if the saltus of $|R(x, y)|$ at P, is greater than 2σ, the minimum of $\alpha_\sigma(P)$ at P, must be zero.

Now it has been shewn by Baire that in every sub-interval of the boundary $y = o$, points exist at which the minimum of $\alpha_\sigma(P)$ with respect to the straight line is positive, and this is the case however small σ may be.

It thus appears that in the interval (a, b) the points at which the given series is uniformly convergent are everywhere dense, and thus that

the function $|R(x, y)|$ is on the boundary $y = 0$, a point-wise discontinuous function with respect to the continuum (x, y). It follows that the points of (a, b) at which the measure of non-uniform convergence of the given series exceeds an arbitrarily fixed positive number form a closed and non-dense aggregate.

Let it now be assumed that the point-wise discontinuous function $s(x)$ is an integrable function. The condition that the series $\Sigma \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)dx$ converges to the value $\int_{x_0}^{x_1} s(x)dx$, is that a value y_0 of y, can be found corresponding to a given positive number ε, such that $\left|\int_{x_0}^{x_1} R(x, y)dx\right| < \varepsilon$, for any fixed value of y which is $\leqq y_0$.

It will be proved that this condition is satisfied, provided there is no point in the interval (x_0, x_1) at which the saltus of $|R(x, y)|$, the measure of non-uniform convergence, is indefinitely great. If the saltus of $|R(x, y)|$ is at every point finite, then $|R(x, y)|$ has a finite upper limit for every point within the fundamental rectangle; this follows from the fact proved above, that the points on $y = 0$, at which the saltus of $|R(x, y)|$ exceeds a fixed number, form a closed aggregate, and thus if at a converging series of points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ the values of this saltus formed a sequence of increasing numbers which had no finite upper limit, the saltus at the limiting point $\underset{n=\infty}{L} x_n$, would be indefinitely great.

Let A be a fixed positive number, then the aggregate G of points at which the saltus of $|R(x, y)|$ exceeds A, is closed and non-dense. It is well known that the aggregate G consists of the extremities of an enumerable aggregate of sub-intervals $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$, together with the limiting points of these extremities. Let I be the content of G, then if $l = x_1 - x_0$, $l - I$ is the limit of $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots$.

A number μ can be found corresponding to any fixed arbitrarily small number ε_1, such that $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\mu > l - I - \varepsilon_1$, and is $< l - I$. Inside each of the intervals θ, take an interval θ', this can be done so that $\sum_1^\mu \theta' = \sum_1^\mu \theta - \varepsilon_2$, where ε_2 is an arbitrarily assigned positive number. The sum $\Sigma\theta'$ lies between $l - I - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, and $l - I - \varepsilon_2$.

Let the interval l be devided into $\mu + s$ sub-intervals of which μ consist of the intervals θ', and the other s are $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_s$; thus $l = \sum_1^s t + \sum_1^\mu \theta'$; all the points of G are in the intervals t.

We first consider the integral taken through the intervals θ'; on θ'_r as base a rectangle of height $\bar{y}_r$ can be drawn so that in that rectangle, $|R(x, y)| \leqq A + \eta$, when η is an arbitrarily small prescribed number. For if this is not the case, there would be points of the x-axis in θ'_r, such that the fluctuation of $|R(x, y)|$ in areas containing them are $> A$, however small y may be taken, contrary to the hypothesis that at every point of θ'_r the saltus of $|R(x, y)|$ is $< A$, hence $\bar{y}_r$ can be found corresponding to a given η; if y is the greatest of the μ numbers $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_\mu$, then if $y \leqq y$, for every x in the intervals θ', $|R(x, y)| \leqq A + \eta$. It thus appears that $\left|\int_{x_0}^{x_1} R(x, y)dx\right|$, taken through the intervals θ', is $\leqq (A+\eta)\Sigma\theta'$ or $< (l - I - \varepsilon_2)(A + \eta)$, provided $y \leqq y$. The numbers $\bar{y}, y$ converge to zero together.

Next consider the s intervals $t_1, t_2, \ldots, t_s$; for any point x of G, there is a value of y such that for it and all smaller values, $|R(x, y)| < \sigma$, where σ is a fixed positive number which we take $< A$; this arises from the continuity of $R(x, y)$ with respect to y, at the point $(x, 0)$. Take y_1 a value of y, and let G_{y_1} be the aggregate of points belonging to G, such that $|R(x, y)| < \sigma$, provided $y \leqq y_1$. The points of G_{y_1} may be put into a finite number of intervals $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_x$, where $\Sigma\tau < I_{y_1} + \delta$, I_{y_1} denoting the content of G_{y_1}, and δ an arbitrarily chosen positive number. The complementary intervals whose sum is $\Sigma t - \Sigma\tau$ contain only such points of G as do not belong to G_{y_1}. Since there are by hypothesis no points of G at which the upper limit of the fluctuation of $R(x, y)$ in (x, y) is not finite, and this upper limit is everywhere less than some fixed finite number, there exists a finite upper limit of $|R(x, y)|$ for all values of x which are in the intervals t but not in the intervals τ; let this be B. The integral taken through those parts of the intervals t which are not in the τ, is not greater than $B(\Sigma t - \Sigma\tau)$ or is $< B(I + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - I_{y_1})$; B cannot increase as y is diminished.

It now remains to consider the integral taken through the intervals τ; since $R(x, y)$ or $s(x) - s(x, y)$ is integrable in (x_0, x_1), these intervals τ

may be divided into a finite number of sub-intervals such that the sum of those sub-intervals in which the fluctuation of R is $\geqq$ an assigned number, is as small as we please. It thus appears that the intervals τ can be further sub-divided so that $\Sigma\tau = \Sigma\tau' + \Sigma\tau''$, where τ' are intervals in which the fluctuation of R for a fixed y, is $\geqq \alpha$, and the τ'' are intervals in which the fluctuation is $< \alpha$, where α is an arbitrarily chosen number; this can be done so that $\Sigma\tau'$ is arbitrarily small. Let $\alpha + \sigma < A$, then $\left|\int R(x, y)dx\right|$ through the intervals τ', is not greater than $B\Sigma\tau'$. Of the intervals τ'', some contain points of G_{y_1}, and others may not do so; let $\varkappa$ be the sum of the latter, then through these intervals the integral is not greater than $\varkappa B$. For any interval τ'' which contains a point of G_{y_1} $|R(x, y)|$ is everywhere less than $\sigma + \alpha$, where $y \overline{\overline{<}} y_1$; hence the integral through these intervals τ'' is $< (\sigma + \alpha)\Sigma\tau'' < A\Sigma\tau''$. It has now been shewn that

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} R(x, y)dx\right| < (l - I - \varepsilon_2)(A + \eta) + B(I - I_{y_1} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + B(\Sigma\tau' + \varkappa) + A\Sigma\tau''$$

where A, y_1, y are fixed, and ε_2 is arbitrarily small; y is $\leqq y_0$ where y_0 is the smaller of the numbers y_1, y.

Thus the value of $\left|\int_{x_0}^{x_1} R(x, y)dx\right|$ is

$$< (A + \eta)(l - I + \Sigma\tau'') + B(I - I_{y_1} + \varepsilon_1) + B(\Sigma\tau' + \varkappa)$$

or, since $\Sigma\tau'$ is arbitrarily small,

$$< (A + \eta)(l - I + \Sigma\tau) + B(I - I_{y_1} + \varepsilon_1) + B\varkappa$$

$$< (A + \eta)(2l - I) + B(I - I_{y_1} + \varepsilon_1) + B\varkappa.$$

Now it has been shewn by Osgood, that y_1 may be chosen so small that $I - I_{y_1} < \lambda$, where λ is arbitrarily small; we have then also, $\varkappa < \lambda$. The integral is $< (A + \eta)2l + B(2\lambda + \varepsilon_1)$; let $A < \frac{p}{2l}$, and choose y so that $\eta < \frac{q}{2l}$, and y_1 so that $2B\lambda < r_1$, and let the θ' intervals be so chosen

that $B\varepsilon_1 < s_1$, where p, q, r_1, s_1 are positive numbers such that $p + q + r_1 + s_1 = \varepsilon$. We now see that y_0 can be found such that $\left|\int_{x_0}^{x_1} R(x, y)dx\right| < \varepsilon$, if $y \overline{\overline{<}} y_0$; it has thus been established that the term by term integration of the series gives the same result as the integration of the sum $s(x)$ provided $s(x)$ is integrable through the interval of integration, and also the measure of non-uniform convergence is everywhere finite in that interval.

ON SOLUBLE IRREDUCIBLE GROUPS OF LINEAR SUBSTITUTIONS IN A PRIME NUMBER OF VARIABLES

BY

W. BURNSIDE
of GREENWICH, England.

It is well known that if a transitive permutation group of prime degree is soluble it must be cyclical or metacyclical; so that if the degree be p, the order of the group is pr, where r is equal to or is a factor of $p - 1$.

I propose here to consider the corresponding question for an irreducible group of linear substitutions in a prime number of variables; and in particular to determine the numbers which may be the order of such a group when it is soluble.

1. A group of linear substitutions in p variables is called irreducible when it is impossible to find $q(< p)$ linear functions of the variables which are transformed among themselves by every operation of the group. It has recently been shown by Herr FROBENIUS[1] that if a group G, of finite order, is isomorphic (simply or multiply) with an irreducible group of linear substitutions in p variables, then p must be a factor of the order of G.

A group of linear substitutions in p symbols, which is of finite order and ABELIAN, is always completely reducible[2]; *i. e.*, a set of p independent

[1] Berliner Sitzungsberichte, 1896, p. 1382.

[2] I am not aware whether a separate proof of this statement has been published; but it is contained as a special case in Herr FROBENIUS's investigations in the *Berliner Sitzungsberichte* on the representation of a group by means of linear substitutions.

linear functions of the variables can always be found each of which is changed into a multiple of itself by every operation of the group.

If an irreducible group G in p variables, where p is a prime, has a self-conjugate subgroup H, then H must be either irreducible or ABELIAN. In fact, if H is reducible, new variables may be chosen which are transformed among themselves in sets of $n_1, n_2, \ldots, n_r$ by H, where

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r = p.$$

Since H is a self-conjugate subgroup of G, every operation of G must replace the variables of one of these sets by linear functions either of themselves or of the variables of another set; and since G is irreducible, it must contain operations replacing the variables of any one set by linear functions of those of any other set. Hence $n_1, n_2 \ldots, n_r$ must all be equal, and since p is prime they are all therefore unity; in other words H must be ABELIAN.

2. Suppose now that G is a soluble irreducible group in p variables, where p is a prime. Let I denote the self-conjugate subgroup of G which is constituted of its self-conjugate operations. Every operation of I replaces each variable by the same multiple of itself; and I is therefore necessarily cyclical. If n is its order, any one of its operations may be represented by

$$(\omega z_1, \omega z_2, \ldots, \omega z_p)$$

where ω is an nth root of unity.

Let J be the greatest self-conjugate ABELIAN subgroup of G, so that J contains I, and suppose first that J contains operations which do not belong to I. Choose new variables so that J is represented as completely reduced, and let

$$(\varepsilon_1 z_1, \varepsilon_2 z_2, \ldots, \varepsilon_p z_p)$$

be any operation of J, which does not belong to I; so that $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ are roots of unity which are not all the same. If, for every operation of J,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_r,$$

while $\varepsilon_{r+s} (s = 1, 2, \ldots p - r)$ is not equal to ε_1 for every operation, then every operation of G must either transform $z_1, z_2, \ldots, z_r$ linearly among themselves, or must change them into linear functions of another distinct

set of r z's. Since p is a prime and G is irreducible, this is impossible if r is greater than unity. Hence no two ε's are the same for every operation of J. There is therefore no linear functions of the z's, except the p z's themselves, which is changed into a multiple of itself by every operation of J. Every operation of G must therefore permute the z's among themselves, at the same time multiplying them by certain constant factors. If S and T are two operations of G which, apart from these factors, give the same permutation of the z's, then ST^{-1} replaces each z by a multiple of itself and therefore belongs to J. Hence the factor group $G|J$ is simply isomorphic with a permutation group of the p z's. Since G is irreducible this permutation group must be transitive; and since G is soluble the permutation group must be soluble. It is therefore a cyclical or a metacyclical group of degree p. If the order of J be m, the order of G is prm, while r is equal to or is a factor of $p-1$.

Also, if G is transformed so that J shall be completely reduced, every operation of G is of the form

$$z'_i = \omega_i z_{ai+b}\,,$$
$$(i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,p)$$

where the ω's are roots of unity, and the suffixes are reduced, mod. p. A group of linear substitutions in which every operation replaces each symbol by a multiple of itself or of another symbol, I call a permutation group *with factors*. The result of the present section then is that when I is not the greatest self-conjugate Abelian subgroup of G, it is possible to represent G as a cyclical or metacyclical permutation group with factors.

3. It remains to consider the case in which the group I, formed of the self-conjugate operations of G, is the greatest Abelian self-conjugate subgroup contained in G. Of the self-conjugate subgroups of G which contain I, let H be one whose order is as small as possible. The order of $H|I$ is then a power of a prime. Since by supposition H is not Abelian, it must be irreducible. The order of $H|I$ being a power of a prime, it must have self-conjugate operations other than identity. Hence H must have an Abelian self-conjugate subgroup containing and of greater order than I. Let J be the subgroup of greatest order of this kind contained in H. The operations of J cannot all multiply each z by the same

factor, for they would then all be self-conjugate in G. Hence the operations of J are not all self-conjugate in H; and therefore H is an actual subgroup of, and is not identical with, G.

Since H is irreducible and has an ABELIAN self-conjugate subgroup J, whose operations are not all self-conjugate, it can be represented as a cyclical or metacyclical permutation group with factors; and since the order of $H \mid I$ is the power of a prime, that of $H \mid J$, which is at once a factor of $p(p-1)$ and of the order of $H \mid I$, must be p. Hence H can be represented as a cyclical permutation group with factors.

Now G can certainly not be so represented. For in such a group the totality of the operations which replace each symbol by a multiple of itself constitute an ABELIAN self-conjugate subgroup; and if every one of these operations replaces each symbol by the same multiple of itself, G would not be irreducible. Hence since H, which is a self-conjugate subgroup of G, can be represented as a permutation group with factors while G cannot, it must be possible to represent H in more than one way as such a group.

Let
$$(\varepsilon_1 z_1, \varepsilon_2 z_2, \ldots, \varepsilon_p z_p)$$
represent any operation P of J which does not belong to I, so that $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ are roots of unity which are not all equal to each other. Further let
$$(\alpha_1 z_2, \alpha_2 z_3, \ldots, \alpha_{p-1} z_p, \alpha_p z_1)$$
be an operation S of H, not belonging to J. It may be assumed without loss of generality that $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ are all unity; for this is equivalent to taking $z_1, \alpha_1 z_2, \alpha_1\alpha_2 z_3, \ldots$ as variables in the place of $z_1, z_2, z_3, \ldots$, and does not affect the form of the operations of J. The operation S may therefore be written in the form
$$(z_2, z_3, \ldots, z_p, \eta z_1).$$

Let
$$\zeta = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \ldots + \beta_p z_p$$
be one of a second set of p linear functions of the z's which are permuted among themselves with factors by H. When the operation P is carried out on the z's, ζ becomes
$$\zeta' = \beta_1 \varepsilon_1 z_1 + \beta_2 \varepsilon_2 z_2 + \ldots + \beta_p \varepsilon_p z_p,$$

and this is not a multiple of ζ. Hence when all the operations of J are carried out on the variables the number of distinct linear functions which arise from ζ, no one of which is a multiple of any other, is equal to the order of J/I. This is a power of p in any case, and must be equal to p if, as supposed, H can be represented as a permutation group with factors in the ζ's.

Since the order of J/I is p, the pth power of P must belong to I. Hence P must be of the form

$$(\varepsilon_1 \alpha^{a_1} z_1, \varepsilon_1 \alpha^{a_2} z_2, \ldots, \varepsilon_1 \alpha^{a_p} z_p),$$

where α is a pth root of unity.

Further $P^{-1}S^{-1}PS$ must for the same reason belong to I, and therefore $a_{i+1} - a_i$ is independent of i. The operation P is therefore of the form

$$(\varepsilon_1 z_1, \varepsilon_1 \alpha z_2, \varepsilon_1 \alpha^2 z_3, \ldots, \varepsilon_1 \alpha^{p-1} z_p).$$

The p linear functions that arise from ζ by the operations of J are therefore

$$\sum_{i=1}^{i=p} \beta_i \alpha^{t(i-1)} z_i,$$

$$(t = 0, 1, \ldots, p-1).$$

These must be permuted among themselves with factors by S. They are also permuted by P; and therefore it must be possible to determine m so that SP^m changes one of the ζ's, and therefore all of them, into a multiple of itself. The conditions that ζ may be changed into a multiple of itself by SP^m are

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\beta_3}{\beta_2}\alpha^{-m} = \frac{\beta_4}{\beta_3}\alpha^{-2m} = \ldots = \frac{\beta_p}{\beta_{p-1}}\alpha^{2m} = \eta^{-1}\frac{\beta_1}{\beta_p}\alpha^m.$$

When m is assigned these equations determine the ratios of the β's uniquely, and give

$$\frac{\beta_{i+1}}{\beta_1} = \alpha^{\frac{1}{2}mi(i-1)} \eta^{\frac{i}{p}}.$$

Hence if

$$\zeta_{m,n} = \sum_{i=0}^{i=p-1} \alpha^{\frac{1}{2}mi(i-1)+ni} \eta^{\frac{i}{p}} z_{i+1},$$

each of the p sets of p linear functions

$$\zeta_{m,0}, \zeta_{m,1}, \ldots, \zeta_{m,p-1},$$

$$(m = 0, 1, \ldots, p-1)$$

is such that H can be represented as a permutation group with factors in terms of them. Further, these and the z's themselves are the only sets of linear functions of the z's in respect of which H can be so represented. There are therefore just $p+1$ sets of linear functions in terms of which H can be represented as a permutation group with factors.

Since the pth powers of both S and P belong to I, the factor group $H|I$ is a non-cyclical group of order p^2. H has therefore $p+1$ self-conjugate ABELIAN subgroups of index p containing I; and the $p+1$ sets of linear functions give the variables in terms of which each of these subgroups can be represented in completely reduced form.

4. To every operation of G there corresponds an isomorphism of H, and therefore also of $H|I$. The totality of the operations of G, which give the identical isomorphism of $H|I$, constitute a self-conjugate subgroup K of G; and I have shown elsewhere[1] that the order of $K|H$ is a power of p. But J is a self-conjugate subgroup of K, and from § 2 it follows that the order of $K|J$ is equal to or is a factor of $p(p-1)$. Moreover the order of $H|J$ has been shewn to be p. Hence K must be identical with H, and therefore the only operations of G which give the identical isomorphism of $H|I$ are those of H. The factor group $G|H$ is therefore simply isomorphic with a (soluble) subgroup of the group of isomorphisms of a non-cyclical ABELIAN group, order p^2. Moreover this group of isomorphisms can leave no subgroup of order p of the ABELIAN group, order p^2, invariant; for if it did, H would have a subgroup of index p, containing I, and self-conjugate in G, which is not the case. Hence the group of isomorphisms, with which $G|H$ is simply isomorphic, must contain at least one operation which permutes the $p+1$ subgroups

[1] Theory of Groups of finite order (Cambridge), p. 253.

of order p of the ABELIAN group, order p^2, regularly. Now the operations of the group of isomorphisms of a non-cyclical ABELIAN group of order p^2, may be divided into sets which (I) permute the $p+1$ subgroups of order p regularly, (II) leave one such subgroup invariant and permute the remaining p cyclically, (III) leave every operation of one subgroup invariant, change every operation of a second subgroup into a power of itself and permute the remaining subgroups cyclically; and (IV) change every operation into its xth $(x = 1, 2, \ldots, p-1)$ power.

GIERSTER's[1] discussion of the modular group shows that no group containing operations from sets (I) and (II) can be soluble. Hence, since $G|H$ contains operations belonging to (I), it can have none belonging to (II). Suppose now that G has an operation A, given by

$$z_i' = \sum_1^p a_{ij} z_j \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

which gives rise to an isomorphism of $H|I$ belonging to (III). We may then suppose that

$$A^{-1}PA = P^x R,$$

$$A^{-1}SA = SR',$$

where R and R' belong to I. The resulting conditions for the coefficients in A are found to be

$$a_{i,j}(\alpha^{x(i-1)} - k\alpha^j) = 0,$$

$$a_{i,j} - la_{i+1,j+1} \quad = 0,$$

where k and l are the same for all i's and j's. These conditions are inconsistent, unless x is unity; in which case the isomorphism is the identical isomorphism. Again if A gives rise to an isomorphism belonging to set (IV), we have

$$A^{-1}PA = P^x R,$$

$$A^{-1}SA = S^x R',$$

and the resulting conditions for the $a_{i,j}$'s are

$$a_{i,j}(\alpha^{x(i-1)} - k\alpha^j) = 0,$$

$$a_{i,j} - la_{i+x,j+1} \quad = 0.$$

[1] Math. Ann. Vol. XVIII, pp. 319—365.

These again are inconsistent unless $x^2 \equiv 1$, mod. p. Hence $G|H$ contains no operation of set (III) and the only operation it can contain of set (IV) is the one which replaces every operation by its inverse. Finally therefore every operation of $G|H$ must either permute the $p+1$ subgroups of order p regularly, or must leave them all invariant; and the subgroup of $G|H$ which leaves them all invariant consists either of the identical operation only or is of order two. The order of $G|H$ is therefore a factor of $2(p+1)$. The order of G itself is then p^2sn, where s is a factor of $2(p+1)$ and n is the order of the subgroup constituted by the self-conjugate operations of G. It should be noticed that n is necessarily divisible by p, since $P^{-1}S^{-1}PS$, which multiplies each z by α, belongs to I.

5. (*Summary*). Soluble irreducible groups of linear substitutions in a prime number of variables may, from the preceding investigation, be divided into two classes according as they do or do not contain self-conjugate Abelian subgroups other than that formed of their self-conjugate operations.

Those of the first class are multiply isomorphic with a cyclical or metacyclical permutation group of prime degree in respect of the self-conjugate Abelian subgroup of greatest order which they contain. The order of such a group is prm, where p is the number of variables, r a factor of $p-1$ and m the order of the greatest self-conjugate Abelian subgroup. It can be represented as a cyclical or metacyclical permutation group with factors. A group with no self-conjugate operations, except identity, necessarily belongs to this class.

Those of the second class are multiply isomorphic, in respect of the subgroup formed of their self-conjugate operations, with a soluble subgroup of the holomorph of a non-cyclical Abelian group, order p^2. The order of such a group is p^2sn; where p is the number of variables, s a factor of $2(p+1)$, and n (which must be divisible by p) is the order of the subgroup formed of the self-conjugate operations. Such a group cannot be represented as a permutation group with factors.

ÜBER ABEL'S SUMMATION ENDLICHER DIFFERENZENREIHEN.

VON

HEINRICH WEBER
in STRASSBURG.

In der Abhandlung *L'intégrale finie $\sum^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple* (Bd II, N° VII der HOLMBOE'schen Ausgabe von ABEL's Werken, Bd I, S. 34 der neuen Ausgabe) giebt ABEL einen häufig angewandten sehr eleganten Ausdruck für das Integral einer Differenzengleichung. Er benutzt bei der Ableitung dieser Formel gewisse bestimmte Integrale über reelle Variable. Aber schon die äussere Form des Resultates weisst uns auf die Integration über complexe Variable hin, und in der That erhält man auf diesem Wege die ABEL'sche Formel fast unmittelbar. Dieser Weg soll hier eingeschlagen und dann noch einige Anwendungen des Resultates hinzugefügt werden.

I.

Die Aufgabe, um die es sich handelt, lässt sich so aussprechen:

Es soll eine Function $f(x)$ der Variablen x gefunden werden, die, wenn $\varphi(x)$ eine gegebene Function derselben Variablen ist, der Gleichung

$$(1) \qquad f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$$

genügt.

Wenn man x durch $x+1$, $x+2$, ..., $x+n-1$ ersetzt und dann die Summe aller so gebildeten Gleichungen nimmt, so erhält man aus (1)

$$f(x+n) - f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(x+\nu). \tag{2}$$

Jede der Bedingung (1) genügende Function $f(x)$ heisst ein ***Integral der Differenzengleichung*** (1). Ist $f(x)$ ein solches Integral, und $P(x)$ eine willkürliche *periodische Function* mit der Periode 1, so ist $f(x) + P(x)$ das allgemeinste Integral dieser Gleichung.

Mit Hilfe des CAUCHY'schen Satzes über die Integration auf einem geschlossenen Wege lässt sich nun ein solches Integral $f(x)$ leicht bilden.

Man markire in der Ebene einer complexen Variablen z den Punkt, der dem Werthe x, der auch complex sein kann, entspricht, und die Punkte $x \pm 1$, $x \pm 2$, $x \pm 3$, ..., die alle auf einer zur reellen Axe parallelen Geraden liegen, die ich die Linie X nennen will. Durch diese Linie X wird die Ebene z in zwei Halbebenen getheilt, die ich die negative und die positive nennen will, jenachdem sie die negativ oder die positiv unendlichen imaginären Werthe von z enthält.

Nun kann man auf folgende Weise ein Integral $f(x)$ bilden: Man nehme einen Punkt a auf der negativen, einen Punkt b auf der positiven Seite von X an, und verbinde diese beiden Punkte durch irgend einen Weg, der die Linie X in einem Punkt c schneidet, der zwischen x und $x-1$ liegt. Dann ist

$$f(x) = \int_a^b \frac{\varphi(z)\,dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}}. \tag{3}$$

Man erhält daraus $f(x+1)$ wenn man denselben Integranden auf einem anderen Weg nimmt, der die Linie X in einem zwischen x und $x+1$ gelegenen Punkt c' schneidet, und für $f(x+1) - f(x)$ erhält man dann ein Integral, über einen geschlossenen Weg, der von den Polen des Integranden nur den einen, x, umschliesst, das also nach dem CAUCHY'schen Satze den Werth $\varphi(x)$ hat, vorausgesetzt natürlich, dass man sich auf ein Gebiet der z-Ebene beschränkt, in dem $\varphi(x)$ stetig ist.

Wenn man in der Formel (3) die Punkte a, b verändert, ohne sie die Linie X überschreiten zu lassen, so ändert sich die Function (3) nur um eine periodische Function $P(x)$.

II.

Von dem gewonnenen Resultat soll zunächst eine Anwendung auf die Bestimmung der *Gauss'schen Summen* aus der Kreistheilungstheorie gemacht werden, die sich daraus in sehr einfacher Weise ableiten lässt.

Wenn es die Convergenz des Integrals gestattet, so können wir in (3) die Grenzen a und b nach der negativen und positiven Seite ins Unendliche hinaus rücken lassen, und erhalten

$$(4) \qquad f(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\varphi(z)dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}},$$

worin der Integrationsweg immer noch zwischen den Punkten x und $x - 1$ hindurchgehen muss, während z, mit endlichem reellem Theil nach der Seite des positiven und negativen Imaginären ins Unendliche geht. Für $f(x + 1)$ erhält man dieselbe Form, nur dass der Integrationsweg zwischen x und $x + 1$ hindurchgeht.

Macht man in dem Integral für $f(x)$ die Substitution

$$x - z = -it$$

und in dem für $f(x + 1)$ die Substitution

$$x - z = it$$

so erhält man

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi t}\varphi(x + it)dt}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}, \\ f(x + 1) &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pi t}\varphi(x - it)dt}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}, \end{aligned} \right.$$

wobei aber die Integration nach t nicht auf reellem Wege genommen werden darf, weil sie sonst über den Pol $t = 0$ führen würde, sondern sie geht über eine Linie in der t-Ebene, die mit endlichem imaginärem

Theil von negativ unendlichen zu positiv unendlichen reellen Werthen führt, und dabei dem Nullpunkt nach der Seite der *positiv imaginären Werthe* ausweicht.

Nun ist aber nach (1)

$$2f(x) = f(x) + f(x+1) - \varphi(x),$$

und man erhält also aus (4):

$$(5) \qquad f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi t}\varphi(x+it) - e^{\pi t}\varphi(x-it)}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}\, dt,$$

und da hierin der Punkt $t = 0$ nicht mehr Pol des Integranden ist, *so darf die Integration jetzt auf reellem Wege von* $-\infty$ *nach* $+\infty$ *gehen.*

Die Anwendung von (2) ergiebt, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$(6) \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(\nu) = -\frac{1}{2}(\varphi(n) - \varphi(0))$$

$$+ \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi t}(\varphi(n+it) - \varphi(it)) - e^{\pi t}(\varphi(n-it) - \varphi(-it))}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}\, dt.$$

Setzen wir hierin

$$\varphi(x) = e^{\frac{-\pi i x^2}{n}},$$

so folgt unter der Voraussetzung dass n eine *gerade Zahl* ist:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{-\pi i \nu^2}{n}} = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i t^2}{n}}\, dt,$$

und durch die Substitution von $\sqrt{n}\,t$ für t:

$$(7) \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{-\pi i \nu^2}{n}} = -i\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i t^2}\, dt,$$

worin $\sqrt{n}$ positiv zu nehmen ist.

Um das Integral, was hier noch steht, zu bestimmen, brauchen wir nur $n = 2$ zu nehmen, und erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i t^2}\, dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

woraus sich also

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{-\frac{\pi i \nu^2}{n}} = \frac{1-i}{2}\sqrt{2n} \tag{8}$$

ergiebt.

Aus diesem speciellen Fall lässt sich der allgemeine Fall der *Gauss'schen Summe* $\sum e^{\frac{2h\pi i}{n}s^2}$, in der s ein volles Restsystem nach dem Modul n durchläuft und n eine beliebige gerade oder ungerade Zahl ist, wie DIRICHLET gezeigt hat, durch elementare Hilfsmittel ableiten (DIRICHLET's. Werke, Bd I, S. 477, DIRICHLET-DEDEKIND, *Vorlesungen über Zahlentheorie,* Supplement I). Zu bemerken ist noch, dass sich schon KRONECKER der Integration auf complexem Wege bedient hat, um den Werth der GAUSS'schen Summe zu ermitteln (Crelle's Journal, Bd 105, S. 167).

III.

Der Übergang zu unendlichen Grenzen, von dem im Vorhergehenden Gebrauch gemacht ist, ist in der Formel (3) nur unter ganz besonderen Voraussetzungen über die Function $\varphi(x)$ gestattet, die in dem vorigen Beispiel erfüllt sind. Zu einer viel allgemeineren Anwendbarkeit dieses Verfahrens gelangt man aber durch eine kleine Umformung.

Ist wie früher c der Durchschnittspunkt des Integrationsweges mit der Linie X, so können wir den Ausdruck (3) so zerlegen:

$$f(x) = \int_a^c \varphi(z)dz - \int_a^c \frac{\varphi(z)dz}{1-e^{-2\pi i(x-z)}} + \int_c^b \frac{\varphi(x)dz}{1-e^{2\pi i(x-z)}},$$

und wir ändern nun $f(x)$ nur um eine additive Constante, wenn wir in dem ersten dieser drei Integrale die untere Grenze a durch einen beliebigen anderen festen Werth ersetzen. Dann können wir in den beiden anderen Integralen a nach $-i\infty$, b nach $+i\infty$ wachsen lassen, selbst dann noch wenn die Function $\varphi(z)$ mit unendlich wachsendem z wie irgend eine Potenz von z unendlich wird. Wir erhalten dann, wenn wir in dem ersten

Integral die untere Grenze, als ganz beliebig, in der Bezeichnung weglassen:

$$f(x) = \int^{c} \varphi(z)dz - \int_{-i\infty}^{c} \frac{\varphi(z)dz}{1 - e^{-2\pi i(x-z)}} + \int_{c}^{i\infty} \frac{\varphi(z)dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}},$$

oder wenn wir im zweiten und dritten Integral $z - x = -it$ und $z - x = it$ substituieren:

$$(9) \qquad f(x) = \int^{c} \varphi(z)dz - i \int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x - it)dt}{1 - e^{2\pi t}} + i \int_{-i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x + it)dt}{1 - e^{2\pi t}}.$$

Um $f(x + 1)$ zu erhalten, haben wir den Punkt c durch den Punkt c' zu ersetzen, der zwischen x und $x + 1$ liegt. Es hindert uns aber nichts, $c - x = x - c'$ d. h. c und c' gleich weit von x entfernt anzunehmen. Dadurch ergiebt sich

$$(10) \qquad f(x + 1) = \int^{c'} \varphi(z)dz - i \int_{-i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x - it)dt}{1 - e^{2\pi t}} + i \int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x + it)dt}{1 - e^{2\pi t}},$$

und wenn man wieder $f(x + 1) + f(x) = 2f(x) + \varphi(x)$ setzt, so ergiebt sich

$$2f(x) = -\varphi(x) + \int^{c} \varphi(z)dz + \int^{c'} \varphi(z)dz$$

$$+ i \int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x + it) - \varphi(x - it)}{1 - e^{2\pi t}} dt + i \int_{-i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x + it) - \varphi(x - it)}{1 - e^{2\pi t}} dt,$$

und hierin kann man nun, da $t = 0$ wieder kein Pol der Integranden ist, c und folglich auch c' mit x zusammenfallen lassen. So erhält man

$$(11) \qquad f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \int \varphi(x)dx + i \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x + it) - \varphi(x - it)}{1 - e^{2\pi t}} dt.$$

Dies ist die von Abel gegebene Formel. Von ihren zahlreichen Anwendungen sollen nur einige hier angeführt werden.

Macht man die Annahme $\varphi(x) = e^{vx}$, so wird nach (2)

$$f(x+n) - f(x) = e^{vx}\frac{e^{nv}-1}{e^v-1},$$

und aus (11) folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin vt\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{4}\frac{e^v+1}{e^v-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{v}.$$

Dieses von CAUCHY auf anderem Wege abgeleitete Integral ist für ABEL der Ausgangspunkt des Beweises.

Die Entwicklung nach dem TAYLOR'schen Lehrsatz ergiebt:

$$i\big(\varphi(x+it) - \varphi(x-it)\big) = 2\sum (-1)^n \frac{\varphi^{(2n-1)}(x)\,t^{2n-1}}{\Pi(2n-1)},$$

worin n die Reihe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$ durchläuft Wenn man also noch

(12) $$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{B_n}{4n}$$

setzt, so folgt aus (11)

(13) $$f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \int \varphi(x)dx + \sum (-1)^{n-1} B_n \frac{\varphi^{(2n-1)}(x)}{\Pi(2n)}.$$

Diese Reihe ist freilich im allgemeinen divergent, da die *Bernouilli'schen Zahlen* B_n, für die man aus (12) auch den Ausdruck

$$B_n = \frac{2\Pi(2n)}{(2\pi)^{2n}}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^{2n}}$$

findet, mit unendlich wachsenden n wie $2\Pi(2n)(2\pi)^{-2n}$ unendlich werden. Will man also die Reihe (13) benutzen, so muss man sich auf eine endliche Anzahl von Gliedern beschränken und den dabei begangenen Fehler abschätzen, was für jede Function $\varphi(x)$ besonders geschehen muss.

In dem besonderen Fall aber, wenn $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function von x ist, ist die Formel (13) genau richtig, denn die Reihe bricht dann, wenn m der Grad von $\varphi(x)$ ist, ab, sobald $2n - 1 > m$ wird.

Setzt man $\varphi(x) = x^m$, so ergiebt sich aus (11) und (13) ein Polynom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades $S_m(x)$, das nach (2) für ein ganzzahliges x den Werth

$$S_m(x) = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (x-1)^m + S_m(0)$$

darstellt:

$$(14)\qquad S_m(x) = -\frac{1}{2}x^m + \frac{x^{m+1}}{m+1} + i\int_0^\infty \frac{(x+it)^m - (x-it)^m}{1-e^{2\pi t}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}x^m + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \sum^n (-1)^{n-1}\frac{\Pi(m)}{\Pi(2n)\Pi(m-2n+1)}B_n x^{m-2n+1},$$

worin die Summe so weit fortzusetzen ist, als $m-2n+1$ nicht negativ wird. Es ist daher

$$S_m(0) = 0 \quad \text{für ein gerades } m$$

$$(15)\qquad S_m(0) = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m+1}B_{\frac{m+1}{2}} \quad \text{für ein ungerades } m.$$

Aus der Formel

$$S_m(x+1) - S_m(x) = x^m$$

ergiebt sich, wenn man $x = 0$ setzt, $S_m(1) = S_m(0)$ und folglich aus (14) für $x = 1$:

$$(16)\qquad \sum (-1)^{n-1}\frac{\Pi(m)}{\Pi(2n)\Pi(m-2n+1)}B_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1},$$

worin aber die Summe nur so weit auszudehnen ist, als $m-2n+1$ positiv bleibt, also im Falle eines ungerades m das Glied $2n = m+1$ wegzulassen ist.

Hieraus ergeben sich, wenn man $m = 2n$ oder $= 2n+1$ annimmt, für jedes n zwei lineare Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen

$$B_1, B_2, \ldots, B_n,$$

aus denen man diese Zahlen successive berechnen kann, und zwar jedesmal zwei neue aus den schon gefundenen. Beispielsweise für $m = 4$ und $m = 5$:

$$2B_1 - B_2 = \frac{3}{10}, \qquad B_1 - B_2 = \frac{2}{15},$$

woraus man erhält:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \qquad B_2 = \frac{1}{30}.$$

Wenn man in der Formel (13) $\varphi(x) = \log x$ setzt, so erhält man die STIRLING'sche Reihe

$$(17) \quad \log \Gamma(x) = -\frac{1}{2}\log\frac{x}{2\pi} + x(\log x - 1) + \sum (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n(2n-1)}\frac{1}{x^{2n-1}},$$

worin die additive periodische Function aus dem Verhalten von $\Gamma(x)$ im Unendlichen bestimmt wird.

Eine allgemeinere Entwicklung erhält man aus (11), wenn man $\varphi(x) = \log(x + c)$ setzt, worin c eine willkürliche Constante bedeutet, und dann nach fallenden Potenzen von x entwickelt.

Man erhält so zunächst

$$f(x) = -\frac{1}{2}\log(x + c) + (x + c)(\log(x + c) - 1)$$
$$- i\sum^{n}\frac{(-1)^n}{nx^n}\int_0^\infty \frac{dt}{1 - e^{2\pi t}}\left((c + it)^n - (c - it)^n\right)$$

und dies giebt nach (14)

$$f(x) = -\frac{1}{2}\log(x + c) + (x + c)(\log(x + c) - 1)$$
$$- \sum\frac{(-1)^n}{nx^n}\left(S_n(c) + \frac{c^n}{2} - \frac{c^{n+1}}{n+1}\right).$$

Wenn man aber noch $\log(x + c)$ nach fallenden Potenzen von x entwickelt und ein additive Constante aus $x = \infty$ bestimmt, so folgt endlich:

$$(18) \qquad \log \Gamma(x + c) = -\log\sqrt{\frac{x}{2\pi}} + (x + c)\log x - x - \sum\frac{(-1)^n}{nx^n}S_n(c).$$

Die Abschätzung des Restes dieser Entwicklung, wenn man bei irgend einem Gliede abbricht, ist von HERMITE gegeben (Crelle's Journal, Bd. 115).

Strassburg, Weihnachten 1901.

ÜBER DIE MODULN DER THETAFUNCTIONEN

VON

F. SCHOTTKY
in MARBURG.

Die ABEL'schen Functionen von ρ Variabeln, welche durch die Thetafunctionen definirt werden, hängen ausser von den Variabeln ab von $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$ Parametern, den Periodicitätsmoduln. Die ABEL'schen Functionen der RIEMANN'schen Theorie enthalten nur $3\rho - 3$ wesentliche Parameter. Sie sind demnach, sobald ρ den Werth 3 übersteigt, specieller Natur, und damit der RIEMANN'sche Fall eintritt, müssen zwischen den Periodicitätsmoduln eine Anzahl von Gleichungen stattfinden.

Für $\rho = 4$ besteht eine solche Relation. Diese habe ich in einer früheren Arbeit aufgestellt (CRELLE's Journal, Bd. 102). Auf einem andern Wege ist Herr POINCARÉ zu ihr gelangt (Journal de Math., (5) I), sodass für die merkwürdige Formel zwei Beweise vorliegen. Es ist natürlich eine transcendente Relation zwischen den 10 Periodicitätsmoduln, aber sie erscheint als algebraische Gleichung zwischen den Anfangswerthen von 24 geraden Thetafunctionen. Da diese 24 Functionen auf sehr verschiedene Arten gewählt werden können, so ist damit ein System von sehr vielen Gleichungen zwischen den Anfangswerthen der geraden Theta gegeben, charakteristisch für den RIEMANN'schen Fall der ABEL'schen Functionen von vier Variabeln.

Zunächst erwartete ich, nach der Analogie der Fälle $\rho = 2$ und $\rho = 3$, dass sich dieses Gleichungssystem würde auflösen lassen, dass sich für die einzelnen Moduln algebraische Ausdrücke aufstellen lassen würden, die das System identisch befriedigen. Diese Erwartung wurde nicht ohne weiteres

erfüllt. Um das Problem nicht ungelöst zulassen, war ich genöthigt, die Anzahl der unbestimmten Grössen zu vermehren, und nicht nur jedem geraden θ_m eine bestimmte Constante c_m zuzuordnen — das Anfangsglied in der Entwickelung von θ_m nach homogenen Functionen der Variabeln —, sondern ebenso auch jedem ungeraden Theta eine Constante u_m. Diese Constante u_m ist gleichfalls das Anfangsglied in der Entwickelung der ungeraden Function θ_m, aber es ist der Werth dieser linearen Function für specielle Werthe der vier Variabeln. Diese vier Werthe lassen sich so wählen, dass zwischen den c einerseits und den u andrerseits ein Gleichungssystem besteht, scheinbar complicirter als das, welches die c allein unter sich verbindet, für das sich aber eine algebraische Lösung ungezwungen darbietet. Allerdings werden die u und die c nicht durch unabhängige Hülfsgrössen ausgedrückt, aber sie werden in Verbindung gesetzt mit einem System von zehn Punkten im Raume, die durch eine geometrisch übersichtliche Bedingung verknüpft sind.

Es zeigen sich bei diesen Betrachtungen so viele Analogien mit den Abel'schen Functionen von zwei und drei Variabeln, sogar mit den elliptischen, dass ich es für richtig halte, die ganze Untersuchung im vollen Zusammenhange mit den Theorien der Functionen von weniger als vier Variabeln zu führen, auch wenn ich dadurch vielfach auf bekanntes Gebiet komme.

§ 1.

Für das System der geraden und ungeraden Theta, die einer Klasse Abel'scher Functionen zugeordnet sind, ist charakteristisch, dass in den Hälften der Perioden zugleich eine Gruppe von Permutationen der Grössen des Systems gegeben ist. Vermehrt man das Argument u — ich verstehe darunter das System der ρ Variabeln — um eine ganze Periode 2ω, so geht jede Thetafunction in sich selbst über, multiplicirt mit einem Exponentialfactor. Vermehrt man aber u nur eine halbe Periode ω, so entsteht eine Permutation. Da bei einer Addition mehrerer halben Perioden die Reihenfolge gleichgültig ist, da ferner die Addition zweier gleichen halben Perioden eine ganze Periode hervorbringt, so ist auch bei der Zusammensetzung der Permutationen die Reihenfolge gleichgültig, und die Wiederholung derselben Permutation führt zur ursprünglichen Gruppirung zurück.

Wir müssen mit diesen Permutationen so rechnen, als ob es Grössen wären. Die Grundgesetze sind sehr einfach. Es ist $\varkappa\lambda = \lambda\varkappa$, ferner $\varkappa\varkappa = 0$, wenn mit dem Symbol 0 bezeichnet wird, dass keine Änderung eintritt. Ist $\varkappa\lambda\mu = 0$, so ist $\varkappa = \lambda\mu$, $\lambda = \varkappa\mu$, etc. Wenn wir die Permutation »o« mit einrechnen, so ist die Anzahl der Permutationen ebenso gross, wie die der Theta.

Nun findet aber eine Complication statt, die daher rührt, dass die Thetafunctionen theils gerade theils ungerade sind. Es werde, wenn $\varkappa$ das Zeichen für eine beliebige Permutation, und θ_a irgend eins der 4^p Theta ist, mit $\theta_{a\varkappa}$ dasjenige Theta bezeichnet, das aus θ_a durch die Permutation $\varkappa$ hervorgeht. Der Quotient

$$\frac{\theta_{a\varkappa}}{\theta_a} = f_a$$

ist dann eine gerade oder ungerade Function von u, aber keine ABEL'sche Function der Klasse — abgesehen natürlich von dem Falle $\varkappa = 0$. Dagegen gehört, wenn λ eine neue Permutation bedeutet, und man

$$\frac{\theta_{a\varkappa\lambda}}{\theta_{a\lambda}} = f_{a\lambda}$$

bildet, der Quotient beider f:

$$\varphi_a = \frac{f_a}{f_{a\lambda}} = \frac{\theta_{a\varkappa}\,\theta_{a\lambda}}{\theta_a\,\theta_{a\varkappa\lambda}}$$

zu den Functionen der Klasse. Ob diese ABEL'sche Function φ_a gerade oder ungerade ist, hängt ab von den beiden Permutationen $\varkappa$, λ, aber nicht von der gewählten Function θ_a. Denn bildet man ebenso:

$$\varphi_\beta = \frac{\theta_{\beta\varkappa}\,\theta_{\beta\lambda}}{\theta_\beta\,\theta_{\beta\varkappa\lambda}},$$

so entspringt φ_β aus φ_a durch Vermehrung des Arguments um eine halbe Periode. Es geht aber offenbar durch Vermehrung von u um eine halbe Periode eine gerade Function wieder in eine gerade über, und eine ungerade in eine ungerade.

Zwei Permutationen können sich demnach verschieden zu einander verhalten; wir führen das Zeichen

$$(\varkappa, \lambda) = (\lambda, \varkappa)$$

ein, welches $+1$ oder -1 sein soll, jenachdem die oben gebildeten Quotienten $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ gerade oder ungerade Functionen sind, und nennen im ersten Falle, mit FROBENIUS, die Permutationen $\varkappa, \lambda$ syzygetisch, im andern azygetisch.

Das Zeichen $(\varkappa, \lambda)$ entscheidet noch eine andre Frage. Es sei ω die halbe Periode, die der Permutation λ entspricht. Es ist dann, bis auf einen constanten Faktor, $f_{\alpha\lambda}$ mit $f_\alpha(u+\omega)$ identisch. Aus der Gleichung

$$\varphi_\alpha(-u) = (\varkappa, \lambda)\varphi_\alpha(u)$$

folgt demnach:

$$\frac{f_\alpha(-u)}{f_\alpha(-u+\omega)} = (\varkappa, \lambda)\frac{f_\alpha(u)}{f_\alpha(u+\omega)}.$$

Da andrerseits offenbar

$$\frac{f_\alpha(-u)}{f_\alpha(-u+\omega)} = \frac{f_\alpha(u)}{f_\alpha(u-\omega)}$$

ist, so ergiebt sich:

$$f_\alpha(u+2\omega) = (\varkappa, \lambda)f_\alpha(u).$$

Dies sagt aus: Bei der Vermehrung um eine ganze Periode bleibt der Quotient

$$\frac{\theta_{\alpha\varkappa}}{\theta_\alpha}$$

ungeändert oder er wechselt sein Zeichen, je nachdem die Hälfte dieser ganzen Periode, oder die entsprechende Permutation, sich syzygetisch oder azygetisch zur Permutation $\varkappa$ verhält. Hieraus ziehen wir zwei Folgerungen:

Erstens dass, wenn $\varkappa, \lambda, \mu$ drei Permutationen sind,

$$(\varkappa, \mu)(\lambda, \mu) = (\varkappa\lambda, \mu)$$

ist. Wir können hinzufügen, dass auch

$$(\varkappa, \lambda)(\varkappa, \mu) = (\varkappa, \lambda\mu)$$

ist, da ja $(\varkappa, \lambda)$ mit $(\lambda, \varkappa)$ identisch ist. Allgemein, wenn ω, ω' irgendwelche Combinationen gegebener Permutationen sind, ist:

$$(\omega, \omega') = \Pi(\varkappa, \varkappa'),$$

wobei sich das Product erstreckt über alle Elemente x von ω und x' von ω'. Ferner ist offenbar stets

$$(0, x) = 1; \qquad (x, x) = 1,$$

wenn 0 wieder das Zeichen für die identische Permutation bedeutet.

Eine zweite Folgerung ist die, dass die identische Permutation 0 die einzige ist, die sich zu allen andern syzygetisch verhält. Denn ist x von 0 verschieden, so ist der Quotient f'_a keine ABEL'sche Function der Klasse und es muss daher ganze Perioden geben, die f'_a in $-f_a$ überführen.

§ 2.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Zeichen für eine Reihe von Permutationen oder halben Perioden. Fügen wir zu dieser Reihe noch alle aus ihnen combinirten Permutationen hinzu: $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_2x_3$ etc., und ausserdem, als Combination 0ter Ordnung, die Permutation 0 oder die ganze Periode, so erhalten wir eine Gruppe. Die gegebene Reihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soll unabhängig heissen, wenn die 2^n Combinationen lauter verschiedene Permutationen darstellen; n ist dann die Ordnung der Gruppe, und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Basis.

Wir können so für die ganze Gruppe der 4^ρ Permutationen eine Basis

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$$

aufstellen. Wenn wir dann eine beliebige Permutation ω nehmen, und das Verhalten von ω zu den Elementen der Basis feststellen durch die Werthe der 2ρ Vorzeichen

$$(\omega, x_a) = \varepsilon_a, \qquad (a = 1, 2, \ldots, 2\rho)$$

so ist umgekehrt ω eindeutig fixirt durch die Angabe dieser 2ρ Vorzeichen. Denn wäre ω' eine zweite Permutation, die derselben Gleichungen genügt, so wäre offenbar $\omega\omega'$ syzygetisch zu allen Elementen der Basis und somit zu allen 4^ρ Permutationen überhaupt. Dann muss aber nach dem letzten Satz in § 1 $\omega\omega' = 0$, d. h. $\omega' = \omega$ sein. Es folgt hieraus, dass auch jeder Wahl der 2ρ Vorzeichen ε immer eine und nur eine Permutation ω entsprechen muss.

Nehmen wir jetzt eine unabhängige Reihe, die aus weniger als 2ρ Elementen besteht:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad (n < 2\rho).$$

Wenn wir dann die n Gleichungen aufstellen:

$$(\omega, x_\alpha) = \varepsilon_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

in denen die ε beliebig gewählte Vorzeichen bedeuten sollen, so giebt es genau $2^{2\rho-n}$ Permutationen, die diesen n Bedingungen genügen. Denn wenn wir die gegebene Reihe durch Hinzufügung von $2\rho - n$ neuen Elementen $x_{n+1}, \ldots, x_{2\rho}$ zu einer Basis des ganzen Systems vervollständigen, so können wir über die $2\rho - n$ hinzutretenden Vorzeichen (ω, x_α) willkürlich verfügen.

Speciell giebt es hiernach genau $2^{2\rho-n}$ Permutationen, die sich zur Basis einer gegebenen Gruppe n^{ter} Ordnung, und damit zu dieser ganzen Gruppe G, syzygetisch verhalten. Diese bilden ihrerseits wieder eine Gruppe G', und offenbar steht G zu G' in derselben Beziehung, wie G' zu G.

Wenn alle Elemente einer Gruppe G sich gegenseitig syzygetisch verhalten, so nennt man sie eine syzygetische oder Göpel'sche Gruppe. Dazu genügt offenbar, dass die Elemente der Basis sich paarweise syzygetisch verhalten:

$$(x_\alpha, x_\beta) = +1.$$

Die Ordnung einer solchen Gruppe kann nicht grösser als ρ sein. Denn wir haben gesehen: es giebt genau $2^{2\rho-n}$ Permutationen, die zu allen Elementen von G syzygetisch sind. Dazu gehören aber die Elemente von G selbst. Folglich ist $2^n \leqq 2^{2\rho-n}$, d. h. $n \leqq \rho$. Wenn $n < \rho$ ist, so giebt es Permutationen, die zu allen Elementen von G syzygetisch sind, ohne in dieser Gruppe selbst enthalten zu sein. Folglich lässt sich jede Göpel'sche Gruppe von niedrigerer als der ρ^{ten} Ordnung zu einer Gruppe von der ρ^{ten} Ordnung ergänzen.

Denken wir uns wieder eine beliebige Reihe von Permutationen: x_1, $x_2, \ldots, x_n$ gegeben. Wenn je zwei Glieder dieser Reihe sich syzygetisch verhalten, so entspringt hieraus eine Göpel'sche Gruppe. Nehmen wir aber jetzt im Gegentheil an, dass je zwei der Glieder sich azygetisch verhalten:

$$(x_\alpha, x_\beta) = -1 \qquad (\alpha \lessgtr \beta),$$

dann wollen wir die Reihe eine azygetische nennen. — Wir fügen noch

eine Definition hinzu. Wenn durch die Zusammensetzung der einzelnen Permutationen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ die identische Permutation entsteht, also $\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n = 0$ ist, soll die Reihe eine geschlossene heissen.

Fragen wir uns zunächst, ob eine azygetische Reihe $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ zugleich eine geschlossene sein kann. Dann muss

$$\varkappa_n = \varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-1}$$

und deshalb

$$(\varkappa_n, \varkappa_n) = (\varkappa_1, \varkappa_n)(\varkappa_2, \varkappa_n)\ldots(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)$$

sein. Nun ist aber $(\varkappa_n, \varkappa_n) = 1$, während alle Faktoren der rechten Seite gleich -1 sind. Es ergiebt sich also:

$$1 = (-1)^{n-1},$$

d. h.: n muss eine ungerade Zahl sein. Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass solche geschlossene Reihen wirklich existiren. Denn nehmen wir an dass eine gerade Zahl von Permutationen: $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$ gegeben ist, die sich gegenseitig azygetisch verhalten. Fügen wir der Reihe hinzu: $\varkappa_n = \varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-1}$, so verhält sich offenbar $\varkappa_n$ azygetisch zu $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$.

Es sei jetzt $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ eine geschlossene azygetische Reihe, und ω eine beliebige Permutation. Da $\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n = 0$ ist, so ist

$$(\omega, \varkappa_1)(\omega, \varkappa_2)\ldots(\omega, \varkappa_n) = 1.$$

Da n eine ungerade Zahl ist, so können nicht alle Factoren der linken Seite -1 sein; es giebt demnach keine Permutation ω, die sich gleichzeitig zu $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ azygetisch verhält. Mit andern Worten: Eine geschlossene azygetische Reihe kann nicht erweitert werden. Es folgt hieraus weiter, dass eine nicht geschlossene azygetische Reihe nothwendig unabhängig ist. Denn wäre das nicht der Fall, so müsste sich aus einer Anzahl ihrer Glieder eine geschlossene Reihe bilden lassen, und dies ist unmöglich, weil eine geschlossene azygetische Reihe nicht erweitert werden kann.

Eine nicht geschlossene azygetische Reihe kann dagegen stets erweitert werden. Wenn $n = 2\rho$ ist, kann allerdings nur noch das Glied

$$\varkappa_{2\rho+1} = \varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{2\rho}$$

hinzugefügt werden, wodurch sie zu einer geschlossenen azygetischen Reihe

ergänzt wird. Ist aber $n < 2\rho$, so giebt es $2^{2\rho-n}$ Permutationen ω, die zu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ azygetisch sind, also mindestens 2, und somit auch sicher eine, die von $x_1 x_2 \ldots x_n$ verschieden ist.

Man kann demnach azygetische Reihen aufstellen, die aus 2ρ Gliedern bestehen, und die eine Basis bilden für die ganze Gruppe der 4^ρ Permutationen. Jede solche Reihe lässt sich durch Hinzufügung eines letzten Gliedes noch zu einer geschlossenen azygetischen Reihe ergänzen. Jede beliebige Permutation wird dann durch zwei complementäre Combinationen der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho+1}$ dargestellt.

Denken wir uns wieder eine beliebige unabhängige Reihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben und bilden die Reihe der Thetafunktionen, die aus einer, θ_a, durch die Reihe dieser Permutationen hervorgehn:

$$\theta_a, \theta_{ax_1}, \ldots, \theta_{ax_n},$$

so gilt zunächst der Satz: Die Function θ_a kann so gewählt werden, dass alle Glieder dieser Reihe gleichartige, d. h. entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade Functionen sind.

Denn nehmen wir an, die Glieder seien nicht gleichartig. Wir verstehen dann unter ε_ν den Werth $+1$ oder -1, je nachdem die Function mit dem Index ax_ν gleichartig oder ungleichartig ist mit θ_a, und bestimmen eine Permutation ω, die den n Bedingungen

$$(\omega, x_\nu) = \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt. Alsdann ist der Quotient

$$\frac{\theta_a \theta_{ax_\nu}}{\theta_{a\omega} \theta_{a\omega x_\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \nu)$$

gerade oder ungerade, jenachdem ε_ν gleich $+1$ oder -1 ist. Deshalb muss $\theta_{a\omega x_\nu}$ in jedem Falle denselben Charakter haben wie $\theta_{a\omega}$.

Ist $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine geschlossene Reihe von Permutationen, und n eine ungerade Zahl, so nennen wir auch die Reihe der $n+1$ Functionen:

$$\theta_a, \theta_{ax_1}, \ldots, \theta_{ax_n}$$

eine geschlossene. Sie ist dadurch charakterisirt, dass der Quotient den wir enthalten, wenn wir die Hälfte dieser Functionen als Faktoren in den Zähler, die andere Hälfte in den Nenner aufnehmen, immer eine Abel'sche Function der Klasse ist.

Die Reihe θ_α, $\theta_{\alpha\varkappa}$, $\theta_{\alpha\lambda}$ wird geschlossen durch $\theta_{\alpha\varkappa\lambda}$, und ebenso gehört zu jeder ungeraden Anzahl von Thetafunctionen ein bestimmtes Theta, das die Reihe schliesst.

Wir wollen mit $\theta_{\alpha\beta\gamma}$ dasjenige Theta bezeichnen, das die Reihe θ_α, θ_β, θ_γ schliesst, ebenso mit $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ das Schlussglied zu θ_α, θ_β, θ_γ, θ_δ, θ_ε, etc. Jede Combination ungerader Ordnung von Theta-Indices bezeichnet auf diese Weise wieder ein Theta. Dagegen bezeichnen die geraden Combinationen dieser Indices Permutationen. $\alpha\beta$ ist diejenige Permutation, die θ_α in θ_β überführt, $\alpha\beta\gamma\delta$ die, welche sich aus $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zusammensetzt, u. s. f. Wir sagen ferner: die drei Functionen θ_α, θ_β, θ_γ verhalten sich syzygetisch oder azygetisch, je nachdem die ABEL'sche Function

$$\frac{\theta_\alpha\,\theta_\beta}{\theta_\gamma\,\theta_{\alpha\beta\gamma}}$$

gerade oder ungerade ist, und von einer Anzahl von Functionen

$$\theta_\alpha\,,\ \theta_\beta\,,\ \theta_\gamma\,,\ \theta_\delta\ \text{etc.}$$

sagen wir, dass sie eine azygetische Reihe bilden, wenn je drei Glieder sich azygetisch verhalten.

Es ist leicht zu sehen, dass, wenn $\varkappa, \lambda, \mu$ etc. eine azygetische Reihe von Permutationen ist, dann

$$\theta_\alpha\,,\ \theta_{\alpha\varkappa}\,,\ \theta_{\alpha\lambda}\,,\ \theta_{\alpha\mu}\ \text{etc.}$$

eine azygetische Reihe von Functionen darstellt. Falls die Reihe nicht geschlossen ist, ist sie auch unabhängig; wir können daher θ_α so wählen dass alle diese Functionen denselben Charakter haben. Daraus folgt dass sich die Thetafunctionen des ganzen Systems in folgender Weise anordnen lassen: Es kann zunächst eine azygetische Reihe von $2\rho + 1$ gleichartigen Theta aufgestellt werden:

$$\theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \ldots\,,\ \theta_{2\rho+1}.$$

Alle übrigen Theta werden dann bezeichnet durch die Combinationen ungerader Ordnung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2\rho + 1$. Da θ_1, θ_2, θ_3 sich azygetisch verhalten, so ist der Quotient

$$\frac{\theta_1\,\theta_2}{\theta_3\,\theta_{123}}$$

eine ungerade Function; folglich hat θ_{123} den entgegengesetzten Charakter wie θ_1, θ_2, θ_3 etc. Alle Functionen, die durch dreigliedrige Indices bezeichnet sind, haben demnach unter einander denselben, aber zu denen der Hauptreihe entgegengesetzten Charakter. Ebenso schliesst man, dass die Theta mit fünfgliedrigem Index wieder denselben Charakter haben, wie die der Hauptreihe, u. s. f. Am grössten ist die Anzahl der Combinationen von der mittleren Ordnung: ρ oder $\rho + 1$. Diese müssen gerade Functionen bezeichnen, da die Anzahl der geraden überwiegt; demnach sind gerade alle Functionen θ_m, bei denen die Ordnung der Combination m congruent ρ oder $\rho + 1$ mod. 4 ist, ungerade die übrigen.

Die Functionen der Hauptreihe sind gerade, wenn $1 \equiv \rho$ oder $\equiv \rho + 1$ mod. 4 ist, d. h. für $\rho \equiv 0$ und $\equiv 1$ mod. 4; in den andern Fällen sind sie ungerade.

Statt der nicht geschlossenen azygetischen Reihe kann man auch die geschlossene Reihe der Bezeichnung zu Grunde legen, die man erhält, wenn man der Hauptreihe noch als letztes Glied die Function

$$\theta_{2\rho+2} = \theta_{123\ldots 2\rho+1}$$

hinzufügt. Jedes Theta wird dann durch zwei complementäre Combinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, 2\rho + 2$ bezeichnet. Indess kann hier insofern eine Unregelmässigkeit eintreten, als $\theta_{2\rho+2}$ nicht nothwendig von derselben Art ist, wie $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2\rho+1}$. Wenn ρ gerade ist, so haben alle $2\rho + 2$ denselben Charakter, weil dann $2\rho + 1 \equiv 1$ mod. 4 ist; wenn aber ρ ungerade ist, so ist $\theta_{2\rho+2}$ von entgegengesetzter Art.

Es kann allerdings auch in diesem letzteren Falle die volle Symmetrie in Bezug auf die Indices $1, 2, \ldots, 2\rho + 2$ gewahrt werden, wenn man eine leichte Modification der Bezeichnung eintreten lässt. Durch die Reihe $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2\rho+2}$ ist die Bezeichnung der Permutationen festgelegt; jeder Permutation entsprechen zwei complementäre Combinationen gerader Ordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, 2\rho + 2$. Nun bevorzugen wir die Function $\theta_{2\rho+2}$, indem wir sie ohne Index lassen, und allen übrigen geben wir den Index derjenigen Permutation, durch die sie aus θ hervorgehen. Dann ist leicht zu sehen, dass Combinationen derselben Ordnung auch wieder Functionen von gleichem Charakter bezeichnen. Nehmen wir z. B. $\rho = 1$. Die geraden elliptischen Theta würden bei dieser Festsetzung zu bezeichnen

sein als θ_{12} oder θ_{34}, θ_{13} oder θ_{24}, etc., während $\theta = \theta_{1234}$ das ungerade Theta ist. Für $\rho = 3$ würden

$$\theta_{12}\,,\ \theta_{12}\,,\ \ldots\,,\ \theta_{78}$$

die 28 ungeraden, θ und $\theta_{1234} = \theta_{5678}$ etc. die geraden Functionen sein.

Die Existenz der gleichartigen azygetischen Reihen war schon Riemann bekannt. Es ist noch ein Punkt zu besprechen, der für unsere algebraische Untersuchung von grosser Wichtigkeit ist, und auf den Noether und Frobenius aufmerksam gemacht haben. Nehmen wir eine Göpel'sche Gruppe G, und bilden die Produkte

$$P_a = \prod_x (\theta_{ax}),$$

jedes dieser Produkte erstreckt über die 2^n Elemente von G. Die Mehrzahl dieser Produkte enthält gerade und ungerade Faktoren gemischt, und zwar sind dann jedesmal soviel gerade wie ungerade Faktoren vorhanden. Denn nehmen wir an, dass ein Faktor $\theta_{ax'}$ existirt, der von entgegengesetzter Art ist wie θ_a, dann müssen, wenn θ_{ax} irgend einen andern Faktor bedeutet, auch θ_{ax} und $\theta_{axx'}$ von entgegengesetzter Art sein, weil der Quotient

$$\frac{\theta_{ax}\,\theta_{ax'}}{\theta_a\,\theta_{axx'}}$$

eine gerade Function ist. Die Faktoren von P_a lassen sich also paarweise zusammenfassen, sodass immer der eine gerade, der andere ungerade ist.

Wären nur solche Produkte vorhanden, so wäre die Anzahl der geraden Theta gleich der der ungeraden, was nicht der Fall ist.

Beschränken wir uns jetzt auf diejenigen P_a, welche nur gleichartige Faktoren enthalten, so haben wir ein System, das, was die Gruppierung anbetrifft, genau analog ist dem System der Thetafunctionen von $\rho - n = \sigma$ Variabeln.

Gehört x der Gruppe G an, so ist $P_{ax} = P_a$. Eine solche Permutation ist demnach für unser System als identische anzusehen.

Damit $P_{a\lambda}$, ebenso wie P_a, ein Produkt gleichartiger Faktoren sei, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass λ sich zur ganzen Gruppe G syzygetisch verhält. Dieser Bedingung genügt eine Gruppe von $2^{2\rho-n}$ Permutationen, unter denen aber die der Gruppe G mit enthalten sind. Wir können also eine zweite Gruppe g' definiren, von der Ordnung $2\rho - 2n = 2\sigma$,

in der Weise, dass jede zur Gruppe G syzygetische Permutation sich darstellt in der Form $\varkappa\lambda$, wo $\varkappa$ der Gruppe G, λ der Gruppe G' angehört.

Die Permutationen der Gruppe G sind dann die einzigen, welche syzygetisch sind zu beiden Gruppen G und G'. Folglich giebt es in der Gruppe G' ausser der Permutation o keine andere, die zu allen Elementen von G' syzygetisch wäre.

Damit sind für das System derjenigen P_α, die Produkte von lauter gleichartigen Theta sind, dieselben Grundlagen aufgestellt, von denen wir ausgegangen sind bei der Gruppierung der 4^ρ Functionen Theta. Die Anzahl der P_α beträgt 4^σ, und es giebt zwei Arten der P_α: Produkte gerader, und Produkte ungerader Theta. Wir können sagen, dass drei Produkte P_α, P_β, P_γ sich syzygetisch oder azygetisch verhalten, jenachdem der Quotient

$$\frac{\theta_\alpha\,\theta_\beta}{\theta_\gamma\,\theta_{\alpha\beta\gamma}}$$

gerade oder ungerade ist. Wir können dann geschlossene azygetische Reihen der P aufstellen, die immer aus einer geraden Anzahl von Gliedern bestehen, und speziell für die Bezeichnung der P eine Hauptreihe

$$P_1\,,\ P_2\,,\ \ldots,\ P_{2\sigma+1}$$

zu Grunde legen, die aus P-Functionen der gleichen Art besteht, während

$$P_{123}\,,\ P_{124}\ \text{etc.}$$

von der entgegengesetzten Art sind wie die Functionen der Hauptreihe.

Nehmen wir z. B. $n = \rho - 1$, also $\sigma = 1$, so besteht das System der P aus vier Grössen: P_1, P_2, P_3 und P_{123}; die drei ersten sind Produkte gerader, das letzte ein Produkt ungerader Theta.

Für $n = \rho - 2$ existiren 16 Functionen P. Die sechs Produkte ungerader Theta bilden eine geschlossene azygetische Reihe:

$$P_1\,,\ P_2\,,\ \ldots,\ P_6;$$

die Produkte gerader sind dann:

$$P_{123} = P_{456}, \qquad P_{124} = P_{356}, \quad \text{etc.}$$

Für $n = \rho$ reduzirt sich das System der P auf eine einzige Function, und diese ist ein Produkt gerader Theta.

§ 3.

Die Aufstellung der quadratischen Relationen unter den Thetafunctionen beruht auf sehr einfachen Sätzen.

Erstens: Von den Quadraten der Theta sind nur 2^ρ linear-unabhängig.

Zweitens: Auch von den Produkten

$$P_a = \theta_a \theta_{a\varkappa},$$

die zu einer bestimmten Permutation oder halben Periode $\varkappa$ gehören, sind nur 2^ρ linear-unabhängig. Diese Produkte sind aber theils gerade, theils ungerade Functionen. Beschränkt man sich auf die geraden, so sind nur $2^{\rho-1}$ unabhängig; dasselbe gilt von den ungeraden.

Drittens: Jede der Gleichungen, die sich hiernach zwischen den Thetafunctionen ergiebt, bleibt richtig, abgesehen von den Vorzeichen der einzelnen Glieder, bei sämmtlichen 4^ρ Permutationen des Systems. Aus

$$\Sigma(A_a \theta_a^2) = 0$$

folgt demnach

$$\Sigma(\pm A_a \theta_{a\lambda}^2) = 0,$$

und aus

$$\Sigma(A_a P_a) = 0,$$

$$\Sigma(\pm A_a P_{a\lambda}) = 0.$$

Auf die Vorzeichen wollen wir im folgenden wenig Rücksicht nehmen, um die Untersuchung nicht zu complicieren.

Wir bezeichnen durchweg mit c_a den constanten Werth, den eine gerade Function θ_a für $u = 0$ annimmt, und wenn θ_a ungerade ist, mit u_a ihr lineares Anfangsglied.

Fangen wir an mit dem Falle $\rho = 1$. Hier existieren drei gerade Theta: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Sie bilden eine azygetische Reihe, die geschlossen wird durch Hinzufügung des ungeraden Theta. Letzteres kann ohne Index bleiben.

Zwischen den Quadraten von je drei der Theta besteht eine lineare Relation, deren Coefficienten sicht leicht bestimmen lassen. Nehmen wir z. B.:

$$A_1\,\theta_1^2 + A_2\,\theta_2^2 + A_3\,\theta_3^2 = 0.$$

Dies wird durch die Permutation 12 übergeführt in:

$$A_1\,\theta_2^2 \pm A_2\,\theta_1^2 \pm A_3\,\theta^2 = 0.$$

Daraus folgt, wenn man $u = 0$ setzt:

$$A_1 c_2^2 = \pm A_2 c_1^2.$$

Hiernach erhält die Gleichung zwischen θ_1, θ_2, θ_3 die Form

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{3} (\pm\, c_\alpha^2\,\theta_\alpha^2) = 0,$$

und daraus wiederum ergiebt sich für $u = 0$ die bekannte Constantenrelation:

$$(2) \qquad \sum_{\alpha=1}^{3} (\pm\, c_\alpha^4) = 0.$$

Für $\rho = 2$ haben wir 6 ungerade und 10 gerade Theta. In den 6 ungeraden:

$$\theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \ldots,\ \theta_6$$

liegt eine geschlossene azygetische Reihe vor. $\theta_{123} = \theta_{456}$, etc. sind die 10 geraden Functionen.

Die übrigen sechsgliedrigen azygetischen Reihen gehen aus der Reihe der ungeraden hervor durch die 15 Permutationen 12, 13, ..., 56. Sie enthalten jedesmal vier gerade und zwei ungerade Functionen; z. B.:

$$\theta_{156}\,,\ \theta_{256}\,,\ \theta_{356}\,,\ \theta_{456};\ \ \theta_5\,,\ \theta_6\,.$$

Aus den geraden Theta allein lassen sich demnach 15 verschiedene viergliedrige azygetische Reihen bilden.

Zwischen den Quadraten von je fünf Thetafunctionen besteht eine lineare Gleichung. Ist aber eins dieser fünf Theta gerade, die übrigen ungerade, so muss offenbar der Coefficient des geraden Theta gleich 0 sein. Es besteht also z. B. eine Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (A_\alpha\,\theta_\alpha^2) = 0.$$

Wendet man hier die Permutation $34 = 1256$ an, und setzt dann $u = 0$, so folgt:

$$A_1 c_{256}^2 = \pm A_2 c_{156}^2.$$

Hiernach bestimmen sich die Coefficienten A_α; es ergiebt sich:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm c_{\alpha 56}^2 \theta_\alpha^2) = 0.$$

Wir können sagen, dass hiermit die Relation gegeben ist, die zwischen vier ungeraden Theta besteht, oder auch, allgemeiner, zwischen irgend vier Theta, die eine azygetische Reihe bilden; sie hat die Form

$$\sum (\pm c_{\alpha x}^2 \theta_\alpha^2) = 0,$$

wo x diejenige Permutation bedeutet, durch die alle vier Theta in gerade übergeführt werden.

Nehmen wir speciell die vier Functionen als gerade an, so haben wir:

$$(3) \qquad \sum (\pm c_\alpha^2 \theta_\alpha^2) = 0,$$

und für $u = 0$:

$$(4) \qquad \sum (\pm c_\alpha^4) = 0.$$

Diese viergliedrige Gleichung stellt ein System von 15 verschiedenen Relationen zwischen den Anfangsgliedern der 10 geraden Theta dar, da sich aus den geraden Theta 15 verschiedene viergliedrige azygetische Reihen bilden lassen.

Gehen wir jetzt über zu den Produkten

$$P_\alpha = \theta_\alpha \theta_{\alpha x},$$

die zu einer der 15 halben Perioden gehören. Unter diesen acht Produkten giebt es vier, deren Faktoren gleichartig sind, und zwar drei Produkte gerader, ein Produkt ungerader Theta. Zwischen je drei dieser vier Functionen besteht eine lineare Gleichung; alle vier bilden eine geschlossene azygetische Reihe. Nennen wir, allerdings abweichend von der zuerst gewählten Bezeichnung der Theta, P_1, P_2, P_3 die drei Produkte erster Art, so können wir, da die Verhältnisse genau so liegen, wie bei den

Quadraten der Thetafunctionen von einer Variabeln, die beiden Formeln aufstellen:

(5)
$$\sum_{a=1}^{3} (\pm p_a P_a) = 0,$$

(6)
$$\sum_{a=1}^{3} (\pm p_a^2) = 0,$$

wo p_a den Werth von P_a für $u = 0$ bedeutet.

Kehren wir zurück zur ursprünglichen Bezeichnung und wählen etwa für $\varkappa$ die Permutation 56. Es sind dann

$$\theta_{145}\theta_{146}\,,\ \theta_{245}\theta_{246}\,,\ \theta_{345}\theta_{346}$$

die drei zugehörigen Produkte gerader Theta. Somit bestehen die Relationen:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm c_{a45} c_{a46}\, \theta_{a45}\theta_{a46}) = 0,$$

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm c_{a45}^2 c_{a46}^2) \qquad = 0.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ziehn wir eine weitere Folgerung. Wir wenden die Permutation 46 an, wodurch θ_{a46} in θ_a, θ_{a45} in θ_{a56} übergeführt wird, und beschränken uns auf die Anfangsglieder. So ergiebt sich:

(7)
$$\sum_{a=1}^{3} (\pm c_{a45} c_{a46} c_{a56} u_a) = 0.$$

Wir können dieser Gleichung auch die Form geben:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm c_{a\varkappa} c_{a\lambda} c_{a\varkappa\lambda} u_a) = 0;$$

$\varkappa$, λ und $\varkappa\lambda$ bedeuten hier diejenigen drei Permutationen, die gleichzeitig θ_1, θ_2, θ_3 in gerade Functionen überführen. Da θ_1, θ_2 und θ_3 irgend drei der sechs ungeraden Functionen sein können, so ist hiermit allgemein die Beziehung zwischen den Anfangsgliedern dreier ungeraden Theta dargestellt.

Bilden wir jetzt die entsprechenden Gleichungen für $\rho = 3$. Zunächst kann man sagen, dass zwischen den Quadraten von neun Thetafunctionen immer eine lineare Gleichung bestehen muss. Es gilt aber der Satz, dass

schon sechs Theta durch eine solche Gleichung verbunden sind, falls sie eine geschlossene azygetische Reihe bilden. Wenn dies zugleich lauter gerade Functionen sind, so hat die Relation die einfache Form:

$$\sum_{a=1}^{6} (\pm c_a^2 \theta_a^2) = 0. \tag{8}$$

Um dies zu beweisen, denken wir uns zunächst für die Bezeichnung der 64 Theta eine azygetische Reihe $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_7$ von lauter ungeraden Theta zu Grunde gelegt. Die Functionen $\theta_{\alpha\beta\gamma}$ sind dann gerade, $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ wiederum ungerade, der Combination $12\ldots7$ entspricht eine gerade Function. Wir fügen diese letztere, als θ_8, der Hauptreihe hinzu. Eine dreigliedrige Combination, die das Element 8 enthält, bezeichnet dann nicht eine gerade, sondern eine ungerade Function.

Nehmen wir nun die acht Functionen der Hauptreihe und ausserdem irgend eine andere Function, etwa θ_{678}. Wir können dann die Gleichung aufstellen:

$$A\theta_{678}^2 = \sum_{a=1}^{8} (A_a \theta_a^2).$$

Da θ_8 die einzige gerade Function ist, die in dieser Gleichung vorkommt, so muss der Coefficient A_8 gleich 0 sein. Dasselbe gilt von A_6 und A_7; denn durch die Permutationen 68, 78 gehen alle Functionen in ungerade über, ausgenommen das eine Mal θ_6, das andre Mal θ_7. Demnach lautet die Gleichung so:

$$A\theta_{678}^2 = \sum_{a=1}^{5} (A_a \theta_a^2).$$

Wendet man die Permutation 18 an, und setzt dann $u = 0$, so ergiebt sich:

$$Ac_{167}^2 = \pm A_1 c_8^2.$$

Hiernach bestimmen sich die Coefficienten folgendermassen:

$$c_8^2 \theta_{678}^2 = \sum_{a=1}^{5} (\pm c_{a67}^2 \theta_a^2),$$

und dies ist in Übereinstimmung mit dem aufgestellten Satze. Denn θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_5$ und $\theta_{678} = \theta_{12345}$ bilden eine geschlossene azygetische Reihe, und 67 ist diejenigen Permutation, die alle sechs Functionen in gerade überführt.

Der Satz ist damit auch allgemein bewiesen. Denn nehmen wir an, es liege eine geschlossene azygetische Reihe von sechs Theta vor. Wenn wir das letzte Glied fortlassen, so können die fünf übrigen zu einer siebengliedrigen azygetischen Reihe ergänzt werden, und es giebt eine Permutation, die diese sieben Theta in lauter ungerade überführt.

Gehen wir zu den Produkten

$$P_a = \theta_a \theta_{a\varkappa}$$

über, die einem bestimmten $\varkappa$ entsprechen. Unter diesen sind 16 gerade Functionen, davon 6 Produkte ungerader Theta. Die letzteren bilden wieder eine geschlossene azygetische Reihe. Ausserdem sind von den 16 P_a nur $2^{p-1} = 4$ linear-unabhängig. Hiernach ist klar, dass zwischen ihnen genau dieselben Relationen bestehen wie zwischen den Quadraten der 16 Thetafunctionen von zwei Variabeln. Sind speciell P_1, P_2, P_3, P_4 vier der 16 Functionen, die eine nicht geschlossene azygetische Reihe bilden, so muss

$$(9) \qquad \sum_{a=1}^{4} (\pm\, p_{a\lambda} P_a) = 0$$

sein, wobei λ diejenige Permutation bedeutet, die alle vier Functionen in Produkte gerader Theta überführt. $p_{a\lambda}$ bedeutet, wie früher, den Werth von $P_{a\lambda}$ für $u = 0$.

Nehmen wir jetzt eine GÖPEL'sche Gruppe zweiter Ordnung: $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$, und bilden die Produkte

$$Q_a = \theta_a \theta_{a\varkappa} \theta_{a\lambda} \theta_{a\varkappa\lambda}.$$

Es existieren drei solche Produkte — nennen wir sie Q_1, Q_2, Q_3 —, die aus lauter geraden Faktoren bestehen, und ein Produkt ungerader Faktoren, Q_{123}. Die Werthe der drei ersteren für $u = 0$ bezeichnen wir mit q_1, q_2, q_3.

So gehört zu jeder GÖPEL'schen Gruppe zweiter Ordnung ein System von drei Constanten. Diese sind jedesmal durch eine Gleichung

$$(10) \qquad \sum_{a=1}^{3} (\pm\, q_a) = 0$$

verbunden, welche entspricht der Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm\, p_a^2) = 0$$

für $\rho = 2$, und der Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm c_a^4) = 0$$

für $\rho = 1$. Die Formel ist leicht zu beweisen, wenn man die Produkte Q_a auflöst in $P_a P_{a\lambda}$. P_1, P_2, P_3 sind dann drei Produkte gerader Theta, und sie verhalten sich azygetisch; man kann noch ein viertes Produkt gerader Theta P_4 hinzufügen, sodass P_1, P_2, P_3, P_4 eine nicht geschlossene azygetische Reihe bilden. Alsdann besteht die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm p_a P_a) = 0,$$

und aus ihr folgt:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm p_a P_{a\lambda}) = 0.$$

Nun kann Q_4 nicht aus lauter geraden Faktoren bestehen; $P_{4\lambda}$ verschwindet demnach für $u = 0$, und wir erhalten:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm p_a p_{a\lambda}) = 0,$$

oder:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm q_a) = 0.$$

Die Anfangsglieder u_a der ungeraden Theta sind homogene lineare Functionen von drei unabhängigen Veränderlichen und es muss deshalb zwischen je vier dieser Grössen u_a eine lineare Gleichung bestehen. In einfacher Form lassen sich diese linearen Gleichungen nur dann darstellen, wenn die vier entsprechenden Functionen eine azygetische Reihe bilden. Aber diese speciellen linearen Relationen, die man azygetische nennen könnte, genügen vollständig, um sämmtliche 28 u_a durch drei unter ihnen auszudrücken.

Nehmen wir demnach irgend vier ungerade Theta an: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, die sich gegenseitig azygetisch verhalten. Wir können dann diese Reihe durch Hinzufügung dreier neuen ungeraden Functionen: $\theta_5, \theta_6, \theta_7$ zu einer Hauptreihe ergänzen.

Stellen wir die Ausdrücke auf

$$\theta_{a56}\,\theta_{a57}\,. \qquad (a=1,2,3,4)$$

Dies sind Produkte gerader Theta, gehörig zur Permutation $\varkappa = 67$. Es besteht also zwischen ihnen die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm\, c_{a56} c_{a57}\, \theta_{a56}\, \theta_{a57}) = 0,$$

welche durch die Permutation 56 übergeführt wird in:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm\, c_{a56} c_{a57}\, \theta_{a}\, \theta_{a67}) = 0,$$

und hieraus folgt, wenn wir uns auf die Anfangsglieder beschränken:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm\, c_{a56} c_{a57} c_{a67} u_a) = 0.$$

Die Gleichung hat die Form:

$$(11) \qquad \sum_{a=1}^{4} (\pm\, c_{a\varkappa} c_{a\lambda} c_{a\varkappa\lambda} u_a) = 0,$$

wo $\varkappa$, λ und $\varkappa\lambda$ die Permutationen 56, 57, 67 bedeuten, die gleichzeitig alle vier ungeraden Functionen θ_1, θ_2, θ_3 und θ_4 in gerade überführen. Es sind dies nicht die einzigen Permutationen welche diese Eigenschaft haben; es gehört dazu auch noch die Permutation 1234. Wir müssen daher sagen: Zwischen den Anfangsgliedern von vier ungeraden Theta, die sich zu einander azygetisch verhalten, besteht die Gleichung (11), in der $\varkappa$, λ und $\varkappa\lambda$ die drei von 1234 verschiedenen Permutationen bedeuten, die θ_1, θ_2, θ_3 und θ_4 in gerade Functionen überführen.

Alles dies sind Identitäten. Es giebt aber, schon für $\rho = 3$, Systeme von nicht-identischen Gleichungen, die auf der Riemann'schen Theorie beruhn und doch in sehr enger Beziehung zu den hier entwickelten Identitäten stehn.

Betrachten wir einen Augenblick die Abel'schen Functionen von ρ Variabeln in der Riemann'schen Theorie. Sie werden ausgedrückt als rationale symmetrische Functionen von ρ Werthepaaren

$$(x_a\,,\, y_a), \qquad (a=1,2,\ldots,\rho)$$

die alle derselben Gleichung $G(x, y) = 0$ vom Range oder Geschlechte ρ genügen; ihre Klasse ist identisch mit der Gesammtheit dieser rationalen Functionen. Die Variabeln und damit auch die Anfangsglieder u_a der ungeraden Theta werden, gleichfalls symmetrisch, ausgedrückt durch Integrale erster Gattung, und zwar in der Form:

$$u_a = \sum_{\nu=1}^{\rho} \int^{x_\nu, y_\nu} H_a(x, y)\,dx.$$

Offenbar müssen die H_a denselben linearen Gleichungen genügen wie die u_a, ausserdem aber einer Anzahl nicht-linearer Gleichungen, da sie algebraische Functionen einer Variabeln sind.

Setzt man specieller:

$$u_a = \int_{x', y'}^{x, y} H_a(x, y)\,dx,$$

indem man beide Grenzen als variabel ansieht, so gehen die Abel'schen Functionen über in rationale Functionen von (x, y) und (x', y'), die geraden in symmetrische, die ungeraden in alternirende. Der Quotient zweier ungeraden Theta aber wird ein Produkt zweier Faktoren, von denen der eine nur von (x, y) abhängt, der andere dieselbe Function von (x', y') ist. Die Faktoren bestimmen sich, indem man beide Punkte zusammenfallen lässt; man findet leicht:

$$\frac{\theta_a(u)}{\theta_\beta(u)} = \frac{\sqrt{H_a(x, y)}\,\sqrt{H_a(x', y')}}{\sqrt{H_\beta(x, y)}\,\sqrt{H_\beta(x', y')}}.$$

Daraus geht hervor, dass man im Geltungsbereich der Riemann'schen Theorie — die aber, wenn $\rho > 3$ ist, nicht die allgemeinen Abel'schen Functionen umfasst — den Thetarelationen genügen kann, indem man für jedes ungerade Theta setzt:

$$\theta_a = \varphi \cdot \sqrt{H_a(x, y)}\,\sqrt{H_a(x', y')},$$

oder, wenn wir die H_a mit v_a und v'_a bezeichnen:

$$\theta_a = \varphi \cdot \sqrt{v_a}\,\sqrt{v'_a}.$$

Zwischen diesen v_a bestehen dieselben linearen Relationen wie zwischen

den Anfangsgliedern der ungeraden Theta. Die Aufgabe ist jetzt, die nicht-linearen homogenen Gleichungen zwischen den u_α zu finden.

Für $\rho = 3$ existirt im Wesentlichen nur eine solche Gleichung, die vom vierten Grade ist. Wenn wir sie in einer grossen Anzahl verschiedener Formen aufstellen, so müssen aus einer alle übrigen folgen, indem man die linearen Gleichungen zwischen den u_α und den c_α zu Hülfe nimmt.

Wir stützen uns auf einen bekannten algebraischen Satz. Sind x_1, $x_2, \ldots, x_{2n}$ lineare homogene Functionen von n Veränderlichen, welche identisch einer Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} (g_\alpha x_\alpha^2) = 0$$

genügen, und ist

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} (A_\alpha x_\alpha) = 0$$

die Gleichung, durch die $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ verbunden sind, so ist nothwendig:

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} \left(\frac{A_\alpha^2}{g_\alpha}\right) = 0.$$

Ist ferner

$$\sum (B_\alpha x_\alpha) = 0$$

die Gleichung, welche $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und x_{n+2} verbindet, so ist auch

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{A_\alpha B_\alpha}{g_\alpha}\right) = 0.$$

Diesen Satz können wir anwenden auf die Relationen zwischen den Produkten $P_\alpha = \theta_\alpha \theta_{\alpha x}$. Es giebt sechs P_α, die Produkte ungerader Theta sind; nennen wir sie $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Durch die Permutation 56 werden die ersten vier in Produkte gerader Theta übergeführt. Es besteht also die Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, p_{\alpha 56} P_\alpha) = 0.$$

Den Gleichungen wird genügt, wenn wir θ_α durch $\sqrt{u_\alpha}\sqrt{u'_\alpha}$, also P_α durch $\sqrt{w_\alpha}\sqrt{w'_\alpha}$ ersetzen, wo

$$w_\alpha = u_\alpha u_{\alpha x}$$

ist, und w'_a dieselbe Function von x', y' bedeutet. Dies giebt:

$$\sum_{a=1}^{4} \pm p_{a56} \sqrt{w_a} \sqrt{w'_a}) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die vier Grössen $\sqrt{w_1}$, $\sqrt{w_2}$, $\sqrt{w_3}$, $\sqrt{w_4}$ durch zwei lineare Gleichungen verbunden sind, und dass, wenn wir

$$\sum_{a=1}^{3} (A_a \sqrt{w_a}) = 0$$

setzen, nothwendig

$$\sum_{a=1}^{3} \left(\pm \frac{A_a^2}{p_{a56}}\right) = 0.$$

sein muss.

Wir sind offenbar berechtigt, in dieser Gleichung die Combination 56 auch durch 45 oder 46 zu ersetzen. Somit haben wir drei Gleichungen, die mehr als ausreichen, um die Verhältnisse von A_1^2, A_2^2 und A_3^2 zu bestimmen. Sie werden erfüllt, wenn man A_a^2 proportional

$$p_{a45} p_{a46} p_{a56} \qquad (a=1,2,3)$$

annimmt;[1] denn es besteht die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm p_{a45} p_{a46}) = 0,$$

die zur Kategorie der Formeln $\Sigma(\pm q_a) = 0$ gehört. Wir erhalten demnach:

$$(12) \qquad \sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt{p_{a45} p_{a46} p_{a56} w_a}) = 0.$$

---

[1] Eigentlich folgt aus unsern Formeln nur, dass diese Produkte proportional $\pm A_a^2$ sind. Dass $A_a^2 = + p_{a45} p_{a46} p_{a56}$ gesetzt werden darf, ergiebt sich daraus, dass die Vorzeichen in der Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm p_{a45} p_{a46}) = 0$$

übereinstimmen mit den drei ersten Vorzeichen der Gleichung

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm p_{a56} P_a) = 0,$$

was leicht zu beweisen ist.

Vergleichen wir dies mit Formel (7). Wir sehen dann, dass die Relationen zwischen den sechs Wurzelfunctionen

$$\sqrt{w_a} = \sqrt{u_a u_{ax}}$$

genau dieselben sind wie die, welche für $\rho = 2$ zwischen den Anfangsgliedern der ungeraden Theta bestehen, nur dass an die Stelle der c_a die Quadratwurzeln

$$\sqrt{p_a} = \sqrt{c_a c_{ax}}$$

treten. Aber diese Grössen $\sqrt{p_a}$ sind auch ihrerseits durch dieselben Gleichungen verbunden, wie die 10 Grössen c_a im Falle $\rho = 2$.

Da die u_a lineare Functionen von drei Variabeln sind, so haben wir hier, in verschiedenen irrationalen Formen, die Gleichung einer Curve vierten Grades. Die Anzahl der verschiedenen Formen beträgt 63 . 20, als Coefficienten treten auf die Werthe, welche die geraden Theta und die Ableitungen der ungeraden für $u = 0$ annehmen.

§ 4.

Für die ABEL'schen Functionen von vier Variabeln besteht unsre Aufgabe vorläufig nur darin, diejenigen Gleichungssysteme aufzustellen, die den für $\rho = 3$ gefundenen genau analog sind.

Die Relationen zwischen den Quadraten der Theta übergehen wir und gehen bald zu den Produkten

$$P_a = \theta_a \theta_{ax}$$

über. Halten wir x fest; dann existiren 64 solche Produkte, welche gerade Functionen sind, und von diesen sind nur $2^{\rho-1} = 8$ linear unabhängig. Hieraus allein folgt schon, dass zwischen den P_a genau dieselben Relationen bestehen, wie zwischen den Quadraten der Thetafunctionen von drei Variabeln. Speciell gilt also der Satz:

Zwischen je sechs Functionen P_a die eine geschlossene azygetische Reihe bilden, besteht die Gleichung

$$(13) \qquad \sum_{a=1}^{6} (\pm\, p_{a\lambda} P_a) = 0,$$

wo λ diejenige Permutation bedeutet, die alle 6 Functionen in Produkte gerader Theta überführt.

Die Beziehungen zwischen den 136 Constanten c lassen sich in folgender Weise zusammenfassen. Wir nehmen eine GÖPEL'sche Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ und denken uns die Produkte gebildet:

$$Q_a = \theta_a \theta_{a\varkappa} \theta_{a\lambda} \theta_{a\varkappa\lambda}.$$

Es giebt 16 solche Produkte, die lauter gleichartige Faktoren enthalten, davon 10 Produkte gerader Theta. Die Werthe, welche diese letzteren annehmen für $u = 0$, bezeichnen wir mit q_a.

Aus diesen 10 Grössen q_a lassen sich auf 15 verschiedene Arten vier auswählen, die eine azygetische Reihe bilden; diese vier sind jedesmal durch eine Gleichung

$$\Sigma(\pm q_a) = 0 \tag{14}$$

verbunden. Es ist dies dasselbe Gleichungssystem welches besteht zwischen den 10 Grössen p_a^2 für $\rho = 3$, und den c_a^4 für $\rho = 2$.

Der Beweis ist leicht zu führen. Sei q_1, q_2, q_3, q_4 eine der 15 azygetischen Reihen. Wir können

$$Q_a = P_a P_{a\lambda} \qquad (a = 1, 2, 3, 4)$$

setzen. P_1, P_2, P_3, P_4 sind dann Produkte gerader Theta, die ebenfalls eine azygetische Reihe bilden. Ergänzen wir diese zu einer geschlossenen durch Hinzufügung zweier Glieder P_5, P_6, die auch Produkte gerader Theta sein sollen. Dann besteht die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{6} (\pm p_a P_a) = 0,$$

und daraus folgt:

$$\sum_{a=1}^{6} (\pm p_a P_{a\lambda}) = 0.$$

Dies giebt für $u = 0$:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm p_a p_{a\lambda}) = 0,$$

oder:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm q_a) = 0;$$

denn Q_5 und Q_6 können nicht Produkte von 4 geraden Theta sein.

Von jetzt ab machen wir die Voraussetzung, dass es sich nicht um die allgemeinen ABEL'schen Functionen von vier Variabeln handle, sondern um die, welche der RIEMANN'schen Theorie entsprechen. Wir können dann, genau wie im Falle $\rho = 3$, sagen: Es muss möglich sein, den sämmtlichen Thetarelationen zu genügen, indem man für jedes ungerade Theta den Ausdruck

$$\theta_a = \varphi \cdot \sqrt{u_a}\sqrt{u'_a}$$

substituirt. Dabei bedeuten die u_a lineare Functionen von vier Variabeln, die, was ihre Coefficienten anbetrifft, übereinstimmen mit den Anfangsgliedern der entsprechenden Theta. Aber die Variabeln sind nicht unabhängig, sondern proportional algebraischen Functionen einer Veränderlichen x, sodass zwei verschiedene homogene aber nicht lineare Gleichungen zwischen den u_a bestehn. Die u'_a sind dieselben Functionen von einer zweiten Variabeln x'.

An die Stelle von P_a tritt, wenn P_a das Produkt zweier ungeraden Theta ist:

$$P_a = \varphi^2 \cdot \sqrt{w_a}\sqrt{w'_a},$$

wo

$$w_a = u_a u_{ax}$$

ist. Nun nehmen wir an, wir hätten eine sechsgliedrige geschlossene azygetische Reihe von Produkten ungerader Theta:

$$P_1, P_2, \ldots, P_6.$$

λ sei diejenige Permutation, die alle sechs Grössen in Produkte gerader Theta verwandelt. Aus der Gleichung

$$\sum_{a=1}^{6} (\pm p_{a\lambda} P_a) = 0$$

folgt dann:

$$\sum_{a=1}^{6} (\pm p_{a\lambda} \sqrt{w_a}\sqrt{w'_a}) = 0.$$

Da die w'_a von einer andern Variabeln abhängen, als die w_a, so müssen wir hieraus schliessen, dass je vier der sechs Grössen $\sqrt{w_a}$ durch eine lineare Gleichung verbunden sind. Setzen wir demnach an:

$$\sum_{a=1}^{4} (A_a \sqrt{w_a}) = 0,$$

so folgt aus dem algebraischen Hülfssatz den wir im vorigen Paragraph aufgestellt haben, dass die Coefficienten A_a die Bedingung erfüllen müssen

$$\sum_{a=1}^{4} \left(\pm \frac{A_a^2}{p_{a\lambda}}\right) = 0.$$

Wenn ferner B_1, B_2, B_3, B_5 die Coefficienten derjenigen Gleichung sind, die zwischen $\sqrt{w_1}$, $\sqrt{w_2}$, $\sqrt{w_3}$ und $\sqrt{w_5}$ besteht, so muss

$$\sum_{a=1}^{3} \left(\pm \frac{A_a B_a}{p_{a\lambda}}\right) = 0$$

sein.

Die 64 Grössen P_a verhalten sich so, wie die Thetafunctionen von drei Argumenten. Denken wir uns nur P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben, so können wir diese Reihe durch Hinzufügung von drei neuen Produkten ungerader Theta: P_μ, P_ν und P_ρ, zu einer Hauptreihe ergänzen. Verstehen wir dann unter P_5 die Function P_μ, so ist $\lambda = \nu\rho$ diejenige Permutation, die alle sechs Functionen $P_1, P_2, \ldots, P_6$ in Produkte gerader Theta überführt. Ebenso können wir aber P_ν und P_ρ für P_5 nehmen. Zur Bestimmung der Coefficienten in der Relation

$$A_1 \sqrt{w_1} + \ldots + A_4 \sqrt{w_4} = 0$$

haben wir demnach die drei Gleichungen:

$$\sum_{a=1}^{4} \left(\pm \frac{A_a^2}{p_{a\lambda}}\right) = 0. \qquad (\lambda = \mu\nu, \mu\rho, \nu\rho)$$

Diese Gleichungen werden erfüllt, indem man

$$A_a^2 = p_{a\mu\nu} p_{a\mu\rho} p_{a\nu\rho}$$ [1]

[1] In Bezug auf die Vorzeichen gilt hier dasselbe wie in der entsprechenden Betrachtung für $\rho = 3$.

setzt; denn die Formel

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm\, p_{a\mu\rho}\, p_{a\nu\rho}) = 0$$

gehört in die Kategorie der Gleichungen

$$\sum (\pm\, q_a) = 0.$$

Die Gleichung zwischen den vier Wurzelgrössen lautet demnach:

$$(15) \qquad \sum_{a=1}^{4} (\pm \sqrt{p_{a\mu\nu}\, p_{a\mu\rho}\, p_{a\nu\rho}\, w_a}) = 0.$$

Es sind dabei $\mu\nu$, $\mu\rho$ und $\nu\rho$ diejenigen drei von 1234 verschiedenen Permutationen, die gleichzeitig P_1, P_2, P_3 und P_4 in Produkte gerader Theta überführen. Vergleicht man dies mit der Formel (11) im vorigen Paragraphen, so sieht man:

Zwischen den 28 Wurzelgrössen $\sqrt{w_a} = \sqrt{v_a\, v_{ax}}$, die zu einer halben Periode x gehören, bestehn genau dieselben linearen Relationen, wie zwischen den Anfangsgliedern der 28 ungeraden Thetafunctionen von drei Variabeln; allerdings mit der Modification, dass an Stelle von c_a überall $\sqrt{p_a}$ zu setzen ist.

Die Frage ist jetzt: Sind die 36 Grössen $\sqrt{p_a}$ auch genau durch dieselben Gleichungen verbunden, wie die c_a für $\rho = 3$? Dass dies der Fall ist, geht ebenfalls aus unsern Betrachtungen hervor.

Denken wir uns eine Hauptreihe gewählt:

$$P_1, P_2, \ldots, P_7$$

und bezeichnen mit A die Coefficienten der Gleichung, die zwischen $\sqrt{w_1}$, $\sqrt{w_2}$, $\sqrt{w_3}$ und $\sqrt{w_4}$ besteht, mit B die der Gleichung, die besteht zwischen den drei ersten Grössen und $\sqrt{w_5}$. Diese Coefficienten sind uns bekannt:

$$A_a = \pm \sqrt{p_{a56}\, p_{a57}\, p_{a67}}, \qquad (a=1,2,3,4)$$

$$B_a = \pm \sqrt{p_{a46}\, p_{a47}\, p_{a67}}. \qquad (a=1,2,3,5)$$

Nun ist aber:

$$\sum_{a=1}^{3} \left(\pm \frac{A_a B_a}{p_{a67}}\right) = 0;$$

denn 67 ist diejenige Permutation, welche die geschlossene Reihe

$$P_1, P_2, \ldots, P_5, P_{12345}$$

in Produkte gerader Theta überführt. Daher folgt:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt{p_{a46}\, p_{a47}\, p_{a56}\, p_{a57}}) = 0.$$

Wenn man hier die Grössen $\sqrt{p}$ durch c ersetzt, so bekommt man eine der Relationen $\sum(\pm q_a) = 0$, die für $\rho = 3$ bestehen. Dass hier die q_a zu der speciellen syzygetischen Gruppe $(0, 45, 67, 4567)$ gehören, ist unwesentlich; denn man kann für $\rho = 3$ die Hauptreihe $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_7$ so wählen, dass θ_4 in θ_5, und ebenso θ_6 in θ_7 durch vorgeschriebene Permutationen λ, μ übergehn, vorausgesetzt nur, dass λ, μ sich syzygetisch verhalten. Demnach können wir sagen dass für $\rho = 4$ im Riemann'schen Falle zwischen den Grössen $\sqrt{p}$ genau dieselben Relationen bestehen, wie im Falle $\rho = 3$ zwischen den c.

Lösen wir jetzt die Produkte p_a auf in $c_a c_{ax}$, so haben wir folgenden Satz:

Wenn G irgend eine Göpel'sche Gruppe dritter Ordnung ist, so existiren drei zugehörige Produkte

$$R_a = \prod_x (\theta_{ax}) \qquad (a=1,2,3)$$

(erstreckt über die 8 Elemente x von G), die lauter gerade Faktoren enthalten, und somit drei Constanten r_1, r_2, r_3, die Werthe der R_a für $u = 0$. Diese drei Constanten sind stets durch eine Gleichung

$$(16) \qquad \sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0$$

verbunden.

Wir haben demnach ein System von so vielen Gleichungen, als verschiedene Göpel'sche Gruppen dritter Ordnung existiren, d. h.

$$(4^4 - 1)(4^3 - 1)(4^2 - 1) = 240975.$$

Sie sind nicht erfüllt bei willkürlichen Werthen der 10 Periodicitätsmoduln, stellen aber nur eine Beziehung zwischen ihnen dar, sodass eine einzige solche Gleichung mit Nothwendigkeit alle übrigen nach sich zieht.

Diese Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt{r_a}) = 0$$

entspricht den Gleichungen

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm q_a) = 0 \quad \text{für} \quad \rho = 3,$$

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm p_a^2) = 0 \quad \text{für} \quad \rho = 2,$$

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm c_a^4) = 0 \quad \text{für} \quad \rho = 1.$$

Wir wollen die vier Gleichungen zusammenfassen. Bezeichnen wir die vierten Potenzen der Moduln durchweg mit C_a. Es sei jetzt, bei beliebigem ρ, eine Göpel'sche Gruppe von der Ordnung $\rho - 1$ gegeben. Wenn wir uns dann die Produkte gebildet denken

$$\prod_{x} (\theta_{a\lambda})$$

erstreckt über die $2^{\rho-1}$ Elemente von G, so giebt es darunter genau drei, die aus lauter geraden Faktoren bestehn. Diesen entsprechen drei Constanten:

$$\pi_a = \prod (C_{ax}) \qquad (a=1,2,3)$$

und zwischen diesen drei Constanten besteht, für $\rho = 1$, $\rho = 2$, $\rho = 3$, und für $\rho = 4$ im Riemann'schen Falle, die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt[2^{\rho-1}]{\pi_a}) = 0.$$

Wir haben gesehen, dass zwischen den 28 Wurzelfunctionen $\sqrt{w_a}$, die zu einem bestimmten x gehören, genau dieselben Relationen bestehen, wie zwischen den Anfangsgliedern der 28 ungeraden Thetafunctionen von drei Variabeln, mit dem Unterschied, dass an die Stelle von c_a überall $\sqrt{p_a}$ tritt. Aber diese 36 Grössen $\sqrt{p_a}$ genügen ebenfalls genau denselben Gleichungen wie die c_a.

Nun hatten wir für $\rho = 3$ ein System nicht linearer Gleichungen aufgestellt, repräsentirt durch die Formel

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt{p_{a45}\, p_{a46}\, p_{a56}\, w_a}) = 0.$$

Dies sind 20.63 Gleichungen, da wir einerseits die Indices $1, 2, \ldots, 6$ beliebig vertauschen können, andrerseits $\varkappa$ eine beliebige von 63 Permutationen bedeutet. Aber alle diesen Formeln stellen, wenn wir uns die linearen Beziehungen zwischen den u_a gegeben denken, im Wesentlichen nur eine hinzutretende neue Beziehung dar; eine einzige zieht alle übrigen mit Nothwendigkeit nach sich.

Stellen wir nun die entsprechende Formel auf für $\rho = 4$. Wir wählen eine Permutation λ, die zu $\varkappa$ syzygetisch ist, und setzen

$$p_a = c_a c_{a\varkappa},$$

$$q_a = p_a p_{a\lambda} = c_a c_{a\varkappa} c_{a\lambda} c_{a\varkappa\lambda}.$$

Entsprechend:

$$\mathrm{w}_a = u_a u_{a\varkappa},$$

$$x_a = \mathrm{w}_a \mathrm{w}_{a\lambda} = u_a u_{a\varkappa} u_{a\lambda} u_{a\varkappa\lambda}.$$

Zur Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ gehören 16 Produkte gleichartiger Theta, wovon 6 lauter ungerade, 10 lauter gerade Theta enthalten. Die 6 ersteren mögen durch $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$ bezeichnet werden. Wenn wir dann die Gleichung aufstellen:

$$(17) \qquad \sum_{a=1}^{8} (\pm \sqrt[4]{q_{a45}\, q_{a46}\, q_{a56}\, x_a}) = 0,$$

und damit zugleich alle die ins Auge fassen, die aus ihr entstehen ein mal durch Vertauschung der Indices $1, 2, \ldots, 6$, zweitens dadurch, dass wir zwar $\varkappa$ festhalten, aber λ variiren, dann können wir sagen, dass eine dieser Gleichungen alle übrigen nach sich zieht. Da nun der Ausdruck links völlig symmetrisch von $\varkappa$ und λ abhängt, so muss für die Variation von $\varkappa$ dasselbe gelten. Wenn wir demnach das Gleichungssystem (17) gelten lassen für jede GÖPEL'sche Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$, so tritt damit zu den beiden Gleichungen zwischen den Variabeln u, u', u'', u''', die durch die Relationen zwischen den Wurzelfunctionen definirt werden, nur eine neue Gleichung hinzu. Allerdings sind die u_a dann nicht mehr lineare Functionen von vier unabhängigen Grössen, und auch nicht mehr algebraische Functionen einer Veränderlichen, sondern Constanten. Wir haben damit auch jedem ungeraden Theta eine bestimmte Constante, u_a, zugeordnet.

Bezeichnen wir diese constanten Grössen der Gleichmässigkeit wegen ebenfalls mit c_a, so nimmt die Gleichung (17) die Form an:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt[4]{q_a q_{a45} q_{a46} q_{a56}}) = 0.$$

Da jedes q ein Produkt von vier Grössen c ist, so haben wir hier eine Relation von der Gestalt

$$\sqrt[4]{s_1} \pm \sqrt[4]{s_2} \pm \sqrt[4]{s_3} = 0.$$

Die drei s sind Produkte von je 16 Faktoren, die zu einer und derselben Gruppe mit der Basis

$$(x, \lambda, 45, 46)$$

gehören. Diese Gruppe ist nicht rein syzygetisch, da die Permutationen 45, 46 sich azygetisch verhalten.

Die Anzahl dieser Gleichungen beträgt:

$$(4^4 - 1)(4^3 - 1) . 20 = 321300.$$

§. 5.

Ehe wir zur Auflösung der Modulgleichungen übergehen, wollen wir einen Satz aufstellen, aus dem sich die Möglichkeit einer vereinfachenden Transformation ergiebt.

Wenn wir irgend eine der Thetafunctionen ins Auge fassen, so lassen sich die Permutationen scheiden in solche, die den Charakter der Function ändern, und solche, die ihn nicht ändern; von den ersteren sagen wir, dass sie kritisch sind für das betreffende Theta. Hiernach giebt es für jede ungerade Thetafunction von ρ Argumenten

$$\frac{1}{2}(4^\rho + 2^\rho),$$

für jede gerade

$$\frac{1}{2}(4^\rho - 2^\rho)$$

kritische Permutationen.

Es sei nun G eine beliebige Gruppe. Wir bilden das Produkt

$$P_a = \prod_x (\theta_{ax})$$

erstreckt über alle Elemente von G. Durch eine Permutation ω geht P_a über in

$$P_{a\omega} = \prod_x (\theta_{ax\omega}).$$

Wenn ω sich syzygetisch verhält zur ganzen Gruppe G, so ist ω kritisch für alle Faktoren von P_a oder für keinen. Denn der Quotient

$$\frac{\theta_{ax}\theta_{a\omega}}{\theta_a \theta_{ax\omega}} = \varphi$$

ist dann eine gerade Function; wenn also θ_a und $\theta_{a\omega}$ entgegengesetzten Charakter haben, so muss von θ_{ax} und $\theta_{ax\omega}$ dasselbe gelten.

Wenn sich aber ω nicht zu allen Elementen von G syzygetisch verhält, so ist ω kritisch genau für die Hälfte der Faktoren von P_a. Denn angenommen, x sei ein Element von G, das sich zu ω azygetisch verhält. Alsdann ist der Quotient φ eine ungerade Function. Daraus folgt, dass ω kritisch ist für einen der beiden Faktoren θ_a, θ_{ax}, für den andern nicht, und dasselbe gilt offenbar für je zwei Faktoren von P_a, die durch die Permutation x in einander übergeführt werden.

Davon machen wir folgende Anwendung. Es sei ein System von 4^p Grössen C gegeben, die den einzelnen Thetafunctionen zugeordnet sind. Mit diesen setzen wir in Verbindung ein zweites System von $4^p - 1$ Grössen e, die den einzelnen Permutationen entsprechen, und einen Faktor r, indem wir setzen

$$C_m = r \prod_\mu (e_\mu).$$

Das Produkt soll erstreckt werden über alle Permutationen μ, die für θ_m kritisch sind. Wir haben so ein System von 4^p Gleichungen; die Faktoren e sind nicht rational durch die C bestimmt. Wenn wir uns aber nicht nur die C, sondern auch die Werthe ihrer Logarithmen gegeben denken, so können wir das Gleichungssystem durch ein lineares zwischen den Logarithmen ersetzen und auf diese Weise die e eindeutig bestimmen.

Bilden wir jetzt das Produkt

$$\pi_m = \prod_x (C_{mx})$$

erstreckt über die Elemente x einer Gruppe n^{ter} Ordnung, und denken uns für jedes C_{mx} seinen Ausdruck eingesetzt. π_m wird dann zunächst den Faktor r in der 2^nten Potenz enthalten. Wenn ferner μ eine Permutation ist, die nicht zur ganzen Gruppe syzygetisch ist, so ist μ genau für die Hälfte der 2^n Functionen θ_{mx} kritisch; infolge dessen wird der Faktor e_μ 2^{n-1} mal in π_m vorkommen. Ist endlich μ syzygetisch für die ganze Gruppe, so ist μ kritisch für alle Functionen θ_{mx} oder für keine: im ersten Fall kommt e_μ vor in der Potenz 2^n, im zweiten gar nicht. Das Resultat ist demnach:

$$\pi_m = r^{2^n}\left[\Pi(e_\nu)\right]^{2^{n-1}}\left[\Pi(e_\mu)\right]^{2^n},$$

wo das eine Produkt sich erstreckt über alle Permutationen ν, die nicht zur ganzen Gruppe syzygetisch sind, das andre über die Permutationen μ, die zu allen 2^n Functionen θ_{mx} kritisch sind.

Indem wir

$$r\sqrt{\Pi(e)} = R$$

setzen, können wir das Resultat so darstellen:

$$\sqrt[2^n]{\pi_m} = R\,\Pi(e_\mu).$$

Der Faktor R hängt zwar ab von der Wahl der Gruppe, aber nicht von dem speciellen Index m; er fällt also fort bei homogenen Relationen zwischen den π_m, die zu derselben Gruppe gehört. Das Produkt $\Pi(e_\mu)$ enthält um so weniger Faktoren, je grösser die Ordnung der Gruppe ist.

Damit ist zugleich die Auflösung des Gleichungssystems gewonnen. Es sei e_μ irgend einer der Faktoren e. Wir wählen zunächst zwei Functionen θ_m, θ_n in der Weise, dass μ kritisch ist für θ_m, nicht kritisch für θ_n. Dann bilden wir die Produkte:

$$\pi_m = \Pi(C_{mx}), \qquad \pi_n = \Pi(C_{nx}),$$

erstreckt über die Gruppe derjenigen Permutationen x, die zu μ syzygetisch sind. Diese Gruppe ist von der Ordnung $2\rho - 1$. Kritisch für sämmtliche Functionen θ_{mx} oder sämmtliche θ_{nx} kann nur eine Permutation sein, die zur ganzen Gruppe syzygetisch ist, also nur μ; nun ist μ kritisch für θ_m, aber nicht für θ_n; folglich erhalten wir:

$$\sqrt[2^{2\rho-1}]{\pi_m} = \rho e_\mu, \qquad \sqrt[2^{2\rho-1}]{\pi_n} = \rho,$$

oder:

$$e_\mu = \sqrt[2^{2p-1}]{\frac{\pi_m}{\pi_n}}.$$

§ 6.

Wir wollen die elliptischen Functionen nicht übergehen. Unter c_1, c_2, c_3 verstehen wir wie früher die Anfangswerthe der geraden Theta; der ungeraden Function θ ordnen wir gleichfalls eine Constante c zu, die willkürlich gewählt sein kann. Die Faktoren e_a definiren wir dann durch die Gleichungen:

$$c_1^4 = re_{23}, \qquad c_2^4 = re_{31}, \qquad c_3^4 = re_{12},$$

$$c^4 = re_{12}\, e_{13}\, e_{23}.$$

In der letzten Formel kommen drei Faktoren e vor, weil für das ungerade Theta alle drei Permutationen kritisch sind.

Die Gleichung $c_1^4 \pm c_2^4 \pm c_3^4 = 0$ geht dadurch über in

$$e_{23} \pm e_{31} \pm e_{12} = 0.$$

Dies zeigt, dass man für die e_μ substituiren kann die Differenzen dreier Werthe e_1, e_2, e_3:

$$e_{12} = \pm (e_1 - e_2), \quad \text{etc.}$$

e_1, e_2, e_3 selbst dürfen als unabhängige Werthe angesehen werden.

Sondert man von den Thetafunctionen die Constanten c ab, indem man

$$\theta_a = c_a \cdot \sigma_a, \qquad \theta = c\,.\,\sigma$$

setzt, so nehmen die Relationen zwischen den Quadraten der σ die einfache Form an:

$$(e_2 - e_3)\sigma_1^2 + (e_3 - e_1)\sigma_2^2 + (e_1 - e_2)\sigma_3^2 = 0,$$

$$\sigma_a^2 - \sigma_\beta^2 + (e_a - e_\beta)\sigma^2 = 0.$$

Schärfer treten diese Verhältnisse hervor im Falle $p = 2$. Zehn Constanten, die Anfangswerthe der geraden Theta, sind unmittelbar gegeben; den sechs ungeraden Functionen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6$ ordnen wir ebenfalls bestimmte Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_6$ zu, und zwar sollen dies die Werthe der

linearen Anfangsglieder sein für irgend welche beliebig gewählte constante Werthe u_0, u'_0 der beiden Variabeln u, u'.

Wir haben dann ein System von 16 Constanten c; diese sind durch ein System von 20 Gleichungen verbunden, das repräsentirt wird durch die Formel:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm\, c_a c_{a45} c_{a46} c_{a56}) = 0.$$

Diesen 16 Constanten c stellen wir 15 Faktoren e_μ gegenüber, die den 15 Permutationen $12, 13, \ldots, 56$ entsprechen, indem wir allgemein setzen:

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu),$$

wobei das Produkt zu erstrecken ist über die für ϑ_m kritischen Permutationen. Danach ist z. B.

$$c_1^4 = re_{23}\, e_{24} \ldots e_{56},$$

$$c_{123}^4 = c_{456}^4 = re_{12}\, e_{13}\, e_{23}\, e_{45}\, e_{46}\, e_{56}.$$

Dadurch verwandelt sich die Gleichung zwischen den c in die viel einfachere:

$$e_{23} \pm e_{31} \pm e_{12} = 0.$$

Denn 23 ist offenbar die einzige Permutation, welche für die vier Faktoren des Produkts

$$\vartheta_1\, \vartheta_{145}\, \vartheta_{146}\, \vartheta_{156}$$

kritisch ist.

Die Bedeutung der Relation zwischen den $e_{\alpha\beta}$ ist ohne weiteres klar: sie sagt aus, dass die $e_{\alpha\beta}$ nichts andres sind als die 15 Differenzen von sechs Grössen $e_1, e_2, \ldots, e_6$:

$$e_{\alpha\beta} = \pm (e_\alpha - e_\beta).$$

Es ist bekannt dass sich auch hier die Thetarelationen sehr vereinfachen, wenn man von den einzelnen Functionen die entsprechenden Faktoren c absondert. Setzen wir allgemein

$$\vartheta_m = c_m \cdot \sigma_m.$$

Die Gleichung zwischen vier ungeraden Theta:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm\, c_{a56}^2\, \vartheta_a^2) = 0$$

geht über in

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm c_{a56}^2 c_a^2 \sigma_a^2) = 0$$

oder:

$$e_{23} e_{24} e_{34} \sigma_1^2 \pm \ldots \pm e_{12} e_{13} e_{23} \sigma_4^2 = 0,$$

da 23, 24, 34 und 56 die einzigen Permutationen sind, die gleichzeitig für θ_{156} und θ_1 kritisch sind.

In ähnlicher Weise geht die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{8} (\pm c_{a45} c_{a46} \theta_{a56} \theta_a) = 0$$

über in:

$$e_{23} \sigma_1 \sigma_{156} \pm e_{31} \sigma_2 \sigma_{256} \pm e_{12} \sigma_3 \sigma_{356} = 0;$$

denn kritisch für die vier Functionen

$$\theta_{145}, \theta_{146}, \theta_{156}, \theta_1$$

ist nur die Permutation 23.

Endlich geht die Gleichung zwischen vier geraden und zwei ungeraden Functionen:

$$c_{145} c_{146} \theta_{245} \theta_{246} - c_{245} c_{246} \theta_{145} \theta_{146} = \pm c_{345} c_{346} \theta_5 \theta_6$$

über in:

$$\sigma_{245} \sigma_{246} - \sigma_{145} \sigma_{146} = \pm e_{12} e_{34} \sigma_5 \sigma_6,$$

wie ebenfalls ohne jede Rechnung zu erkennen ist.

Für $\rho = 3$ tritt die Schwierigkeit ein, dass man zunächst im Zweifel ist, welches System von Constanten man den ungeraden Theta zuordnen soll. Wir beschränken uns zunächst auf die Relationen zwischen den Anfangswerthen der geraden Theta.

Legen wir eine Hauptreihe

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_7$$

der Bezeichnung zu Grunde. Wir müssen dann eigentlich die übrigen Theta bezeichnen durch die Combinationen dritter, fünfter und siebenter Ordnung der Zahlen 1, 2, ..., 7. Statt dessen lassen wir die Thetafunction, die eigentlich der Combination aller sieben Zahlen entspricht, ohne

Index und ersetzen jede Combination von höherer als der dritten Ordnung durch die complementäre. Es sind dann $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_7, \theta_{12} \ldots \theta_{67}$ die 28 ungeraden Functionen; die übrigen: $\theta_{123} \ldots \theta_{567}$ und θ sind gerade. Die Indices der Theta können wir auch zur Bezeichnung der Permutationen verwenden; die Permutation m ist diejenige, welche θ in θ_m überführt.

Die Relationen zwischen den 36 Grössen c sind gegeben durch den Satz: Zu jeder GÖPEL'schen Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ gehören drei Produkte

$$\theta_a \theta_{a\varkappa} \theta_{a\lambda} \theta_{a\varkappa\lambda},$$

die aus lauter geraden Faktoren bestehen; die Werthe dieser Produkte für $u = 0$ genügen der Gleichung:

$$\Sigma(\pm q_a) = 0.$$

Nehmen wir speciell die Gruppe $(0, 56, 7, 567)$. Die drei Constanten q sind hier:

$$c_{145} c_{146} c_{235} c_{236},$$

$$c_{245} c_{246} c_{315} c_{316},$$

$$c_{345} c_{346} c_{125} c_{126}.$$

Die Summe dieser Produkte ist also gleich 0. Wir können der Gleichung eine einfachere Form geben, nämlich:

$$D_{237} D_{147} \pm D_{317} D_{247} \pm D_{127} D_{347} = 0,$$

wenn wir die Bezeichnung:

$$C_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta\delta} C_{\alpha\gamma\delta} C_{\beta\gamma\delta} = D_{\varkappa\lambda\mu}$$

einführen; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sollen hierbei irgend vier der Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ bedeuten, $\varkappa, \lambda, \mu$ die drei übrigen.

Die Gleichung zwischen den Grössen D sagt offenbar aus, dass sie sich als Determinanten darstellen lassen müssen. Wir können sieben Werthsysteme (A_a, B_a, C_a) aufstellen, sodass allgemein:

$$D_{\varkappa\lambda\mu} = \begin{vmatrix} A_\varkappa & B_\varkappa & C_\varkappa \\ A_\lambda & B_\lambda & C_\lambda \\ A_\mu & B_\mu & C_\mu \end{vmatrix}.$$

ist. Damit wir es nur mit unabhängigen Grössen zu thun haben, sondern wir von jedem Werthsystem $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha)$ einen Faktor l_α ab und schreiben demnach:

$$D_{\varkappa\lambda\mu} = \pm l_\varkappa l_\lambda l_\lambda \begin{vmatrix} a_\varkappa & b_\varkappa & c_\varkappa \\ a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda \\ a_\mu & b_\mu & c_a \end{vmatrix}.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, sämmtliche Grössen c auszudrücken als Functionen der Werthsysteme (a, b, c), die wir als homogene Coordinaten von sieben Punkten der Ebene auffassen können.

Die Determinante

$$\pm \begin{vmatrix} a_\varkappa & b_\varkappa & c_\varkappa \\ a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda \\ a_\mu & b_\mu & c_\mu \end{vmatrix}$$

bezeichnen wir mit $f_{\varkappa\lambda\mu}$, sodass

$$c_{\alpha\beta\gamma}\, c_{\alpha\beta\delta}\, c_{\alpha\gamma\delta}\, c_{\beta\gamma\delta} = l_\varkappa l_\lambda l_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}$$

ist. Wir stellen zunächst eine Gleichung auf, bei der die Faktoren l eliminirt sind:

$$\frac{c_{145}\, c_{146}\, c_{235}\, c_{236}}{c_{245}\, c_{246}\, c_{135}\, c_{136}} = \frac{f_{147}\, f_{237}}{f_{247}\, f_{137}}.$$

Berücksichtigt man, dass die Zahlen 1, 2, ..., 7 beliebig unter einander vertauscht werden können, so ist damit ein Gleichungssystem gegeben zur Bestimmung der Grössen c. Allerdings sind die c dadurch allein noch nicht völlig bestimmt. Wenn wir allgemein

$$c_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{durch} \quad r_\alpha r_\beta r_\gamma c_{\alpha\beta\gamma}$$

ersetzen, wo $r_1, r_2, \ldots, r_7$ beliebig gewählte Faktoren bedeuten, so bleiben die Gleichungen bestehn. Dies ist aber die einzige Unbestimmtheit, welche übrig bleibt.

Die Lösung des Gleichungssystems liegt nahe, wenn man die Indices der Grössen C und f berücksichtigt, die auf beiden Seiten vorkommen. 147 und 237 sind Permutationen, welche kritisch sind für die Faktoren des Produkts

$$\theta_{145}\, \theta_{146}\, \theta_{235}\, \theta_{236}.$$

Dasselbe kann man sagen von den Permutationen 14 und 23, aber von keiner andern. Daraus allein folgt, dass die Gleichungen erfüllt werden, wenn man setzt:

$$C_m^4 = r\Pi(e_\mu),$$

das Produkt erstreckt über die für θ_m kritischen Permutationen μ, und dabei unter e_μ den Ausdruck $f_{\alpha\beta\gamma}$ versteht wenn μ eine dreigliedrige Combination $\alpha\beta\gamma$ ist, dagegen den Werth 1, wenn μ ein zweigliedriger Index $\alpha\beta$ ist. Die Werthe der e mit eingliedrigem Index: $e_1, e_2, \ldots, e_7$, sind vorläufig willkürlich. Darin ist die allgemeine Lösung des Gleichungssystem enthalten, und es bleiben nur $e_1, e_2, \ldots, e_7$ als Functionen der Werthsysteme a, b, c zu bestimmen.

Wir können die Gleichung

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu)$$

auch gelten lassen für den Anfangswerth c der Function ohne Index, da wir die Grössen $e_1, e_2, \ldots, e_7$ noch mit einem Faktor multipliciren können. Sie lautet für diesen Fall offenbar:

$$c^4 = r\,.\,e_1 e_2 \ldots e_7.$$

Fassen wir jetzt allgemein die Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm q_a) = 0$$

ins Auge, die zu einer beliebigen GÖPEL'schen Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ gehört. Die drei Grössen q_1, q_2, q_3 entsprechen drei Produkten gerader Theta: Q_1, Q_2, Q_3. Zu derselben Gruppe gehört noch ein Produkt ungerader Theta: dieses ist Q_{123}. Kritisch für die Faktoren von Q_1 sind nur diejenigen Permutationen, die Q_1 in Q_{123}, oder, was dasselbe ist, die Q_2 in Q_3 überführen. Die Gleichung erhält demnach durch Einführung der Faktoren e die Gestalt:

$$A \pm B \pm C = 0,$$

wo A, B, C Produkte von je vier Grössen e sind. Eine Vereinfachung tritt insofern ein, als ein Theil der Faktoren e den Werth 1 hat.

Nehmen wir jetzt die specielle Gruppe:

$$(0, 45, 67, 123).$$

Die zugehörigen Produkte gerader Theta sind:

$$\theta_{\alpha 46}\,\theta_{\alpha 56}\,\theta_{\alpha 47}\,\theta_{\alpha 57}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Die Permutationen die das zweite Produkt in das dritte überfahren sind:

$$23\,,\; 2345 = 167\,,\; 2367 = 145\,,\; 1.$$

Da $e_{23} = 1$ ist, so erhalten wir:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm\, e_\alpha f_{\alpha 45} f_{\alpha 67}) = 0.$$

Nehmen wir ferner die Gruppe:

$$(0\,,\; 127\,,\; 347\,,\; 567),$$

oder:

$$(0\,,\; 3456\,,\; 1256\,,\; 1234).$$

Die drei Functionen Q sind:

$$\theta_{135}\,\theta_{146}\,\theta_{236}\,\theta_{245},$$
$$\theta_{235}\,\theta_{246}\,\theta_{136}\,\theta_{145},$$
$$\theta\quad \theta_{127}\,\theta_{347}\,\theta_{567}.$$

Damit sind auch ohne weiteres die Permutationen gegeben, welche die drei Produkte in einander überführen. Wenn wir berücksichtigen, dass e_{12}, e_{34} und e_{56} gleich 1 sind, so können wir die Formel hinschreiben:

$$\pm\, f_{135} f_{146} f_{236} f_{245} \pm f_{235} f_{246} f_{136} f_{145} = e_7,$$

oder:

$$e_7 = \pm \begin{vmatrix} f_{135} f_{146} & f_{136} f_{145} \\ f_{235} f_{246} & f_{236} f_{245} \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung definirt die Faktoren $e_1, e_2, \ldots, e_7$ als Functionen der Werthsysteme (a, b, c); offenbar ist e_α diejenige quadratische Determinante, welche verschwindet, wenn die sechs von (α) verschiedenen Punkte auf einem Kegelschnitt liegen.

Damit sind jetzt die Grössen c und $c_{\alpha\beta\gamma}$ dargestellt als Functionen unabhängiger Parameter. Abgesehen vom Faktor r, sind die vierten Potenzen der c ganze homogene Functionen der sieben Werthsysteme a_α, b_α, c_α.

Ordnen wir jetzt auch jeder ungeraden Function θ_m eine Constante c_m zu, indem wir die Formel

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu)$$

auch für diesen Fall gelten lassen. Wenn wir an Stelle der Theta wieder σ-Functionen einführen, indem wir setzen

$$\theta_m = c_m \sigma_m,$$

so treten in den σ-Relationen nur die Faktoren $f_{\alpha\beta\gamma}$ und e_α als Coefficienten auf. Wir wollen uns aber darauf beschränken, die Relationen zwischen den Anfangsgliedern der ungeraden Sigma, und die zwischen den Wurzelfunctionen aufzustellen.

Zwischen den Anfangsgliedern von vier ungeraden Theta hatten wir die Gleichung aufgestellt:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm c_{\alpha 56} c_{\alpha 57} c_{\alpha 67} u_\alpha) = 0.$$

Voraussetzung war dabei, dass $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ eine azygetische Reihe bilden, und dass $\theta_5, \theta_6, \theta_7$ diese Reihe ergänzen. Wir setzen

$$u_\alpha = c_\alpha . v_\alpha,$$

sodass jetzt v_α das Anfangsglied einer Sigmafunction ist. Um die entsprechende Gleichung zwischen v_1, v_2, v_3, v_4 in ihrer reducirten Form darzustellen, handelt es sich nur darum, die kritischen Permutationen der Produkte

$$\theta_1 \theta_{156} \theta_{157} \theta_{167}, \quad \text{etc.}$$

festzustellen. Kritisch für das hingeschriebne Produkt sind nur diese:

$$1, 23, 24, 34, 234 \text{ und } 567.$$

Da wir den Faktor e_{567} fortlassen können, so erhalten wir als Coefficienten von v_1:

$$e_1 e_{23} e_{24} e_{34} e_{234}.$$

Entsprechende Werthe haben die Coefficienten von v_2, v_3, v_4. Es bleibt nur noch die Bedeutung der einzelnen Indices festzustellen.

23, 24 und 34 sind die Permutationen die die drei Functionen θ_2, θ_3, θ_4 in einander überführen. 1 und 234 sind diejenigen, welche θ_1 in

θ und in θ_{567} überführen. In welcher Beziehung stehen θ und θ_{567} zu der Reihe $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$? Es sind dies die einzigen geraden Functionen, die der Reihe hinzugefügt werden können, ohne dass sie ihren azygetischen Charakter verliert, und sie ergänzen die Reihe zu einer geschlossenen. Demnach können wir sagen:

Um die Relation zwischen den Anfangsgliedern von vier ungeraden Sigmafunctionen: $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma, \sigma_\delta$, die eine azygetische Reihe bilden, aufzustellen, ergänze man diese Reihe zu einer geschlossenen durch Hinzufügung zweier geraden Functionen $\sigma_\varkappa, \sigma_\lambda$. Die gesuchte Relation lautet alsdann:

$$e_{\beta\gamma} e_{\beta\delta} e_{\gamma\delta} e_{\alpha\varkappa} e_{\alpha\lambda} v_\alpha \pm \ldots \pm e_{\alpha\beta} e_{\alpha\gamma} e_{\beta\gamma} e_{\delta\varkappa} e_{\delta\lambda} v_\delta = 0.$$

Es ist bei dieser Formel durchaus nicht nöthig, dass die vier Functionen der Hauptreihe angehören. Wenn dies aber der Fall ist, so vereinfacht sie sich bedeutend. Die Faktoren $e_{\alpha\beta}, e_{\alpha\gamma}, \ldots, e_{\gamma\delta}$ erhalten den Werth 1. Ferner sind θ und $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ die beiden Functionen $\theta_\varkappa$ und θ_λ. Wir erhalten daher in diesem Falle:

$$e_\alpha f_{\beta\gamma\delta} v_\alpha \pm \ldots \pm e_\delta f_{\alpha\beta\gamma} v_\delta = 0.$$

Diese Gleichung sagt folgendes aus:

Durch eine lineare Transformation der Variabeln u, u', u'' kann man bewirken, dass

$$e_\alpha v_\alpha = a_\alpha u + b_\alpha u' + c_\alpha u'' \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 7)$$

wird.

Nehmen wir statt $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ die folgende Reihe

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \quad \text{und} \quad \theta_{45}.$$

In diesem Falle sind θ_{456} und θ_{457} die beiden geraden Functionen, durch welche die Reihe ergänzt werden kann. Demnach ergiebt sich:

$$e_6 e_7 v_{45} = \pm f_{236} f_{237} f_{245} f_{345} v_1 \pm \cdots \pm f_{126} f_{127} f_{145} f_{245} v_3.$$

Aus diesen Formeln geht die Richtigkeit unsrer früheren Behauptung deutlich hervor, dass die azygetischen Relationen zwischen den 28 Anfangsgliedern ausreichen, um alle durch drei unter ihnen auszudrücken.

Viel einfacher gestalten sich die Relationen zwischen den Wurzelfunctionen. Wir hatten diese zunächst so dargestellt: Zu jedem x gehören

sechs Wurzelfunctionen $\sqrt{w_\alpha} = \sqrt{u_\alpha v_{\alpha x}}$; je drei unter ihnen sind durch eine Gleichung:

$$A_\alpha \sqrt{w_\alpha} + A_\beta \sqrt{w_\beta} + A_\gamma \sqrt{w_\gamma} = 0$$

verbunden, und die Coefficienten haben die Werthe:

$$A_\alpha = \pm \sqrt{p_{\alpha\lambda\mu} p_{\alpha\lambda\nu} p_{\alpha\mu\nu}}, \quad \text{etc.},$$

wenn λ, μ, ν die Indices der drei übrigen Wurzelfunctionen sind.

Ersetzt man u_α durch $c_\alpha v_\alpha$, so tritt zu A_α noch der Faktor $\sqrt{p_\alpha} = \sqrt{c_\alpha c_{\alpha x}}$ hinzu. Die Gleichung nimmt dann die Form an:

$$\sqrt{r_\alpha v_\alpha v_{\alpha x}} \pm \sqrt{r_\beta v_\beta v_{\beta x}} \pm \sqrt{r_\gamma v_\gamma v_{\gamma x}} = 0,$$

wo die r Produkte bedeuten aus je 8 Grössen c, gehörig zu der Gruppe mit der Basis $(x, \lambda\mu, \lambda\nu)$.

Jetzt ist es leicht, die Coefficienten durch die Grössen e auszudrücken. Kritisch für die Faktoren von r_α sind nur die Permutationen, die $\theta_\beta \theta_{\beta x}$ in $\theta_\gamma \theta_{\gamma x}$ überführen, also $\beta\gamma$ und $\beta\gamma x$. Daher ergiebt sich:

$$e_{\beta\gamma} e_{\beta\gamma x} \sqrt{v_\alpha v_{\alpha x}} \pm \ldots \pm e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta x} \sqrt{v_\gamma v_{\gamma x}} = 0.$$

Speciell werden diese Relationen zum Theil äusserst einfach. Nehmen wir z. B. die drei Wurzelfunctionen

$$\sqrt{v_{14} v_{23}}, \quad \sqrt{v_{24} v_{31}}, \quad \sqrt{v_{34} v_{12}},$$

die zu $x = 1234$ gehören. Hier sind alle Coefficienten gleich ± 1. Denn es geht z. B. die zweite in die dritte über durch die Permutationen 23 und 14; es ist aber $e_{23} = e_{14} = 1$.

Ähnlich sind in der Gleichung zwischen

$$\sqrt{v_1 v_{23}}, \quad \sqrt{v_2 v_{31}}, \quad \sqrt{v_3 v_{12}}$$

die Coefficienten einfach: e_1, e_2 und e_3. Denn die zweite geht in die dritte über durch die Permutation 1 und 23.

Zwischen

$$\sqrt{v_1 v_{17}}, \quad \sqrt{v_2 v_{27}}, \quad \sqrt{v_3 v_{37}}$$

besteht die Gleichung:

$$f_{237} \sqrt{v_1 v_{17}} \pm f_{317} \sqrt{v_2 v_{27}} \pm f_{127} \sqrt{v_3 v_{37}} = 0.$$

Endlich: zwischen den Wurzelgrössen, die $x = 1234$ gehören:

$$\sqrt{v_{13} v_{24}}\,,\quad \sqrt{v_{23} v_{14}}\,,\quad \sqrt{v_5 v_{67}}$$

können wir die Relation aufstellen:

$$\pm f_{235} f_{145} \sqrt{v_{13} v_{24}} \pm f_{135} f_{245} \sqrt{v_{23} v_{14}} = \sqrt{v_5 v_{67}}\,.$$

Denn die zweite geht in die dritte über durch die Permutationen 235 und 145, die erste aber in die zweite durch die Permutationen 12 und 34; es sind aber e_{12} und e_{34} gleich 1.

An die beiden letzten Formeln knüpft sich die Bemerkung, dass man die Grössen $\sqrt{u_\alpha}$ oder $\sqrt{v_\alpha}$ selbst in ähnlicher Weise darstellen kann, wie die Constanten c_α. Indem man

$$v_1 v_2 \dots v_7 = \pi,$$

$$\sqrt{v_\alpha v_\beta v_{\alpha\beta}} = F_{\alpha\beta},$$

$$\sqrt{\frac{\pi v_{\alpha\beta}}{v_\alpha v_\beta}} = G_{\alpha\beta},$$

$$\sqrt{\pi}\, v_\alpha = H_\alpha$$

setzt, kann man die erste Gleichung so schreiben:

$$f_{237} F_{17} \pm f_{317} F_{27} \pm f_{127} F_{37} = 0,$$

die zweite aber in die beiden Formen setzen:

$$G_{67} = \pm \begin{vmatrix} F_{13} F_{24} & F_{23} F_{14} \\ f_{135} f_{245} & f_{235} f_{145} \end{vmatrix},$$

$$H_5 F_{67} = \pm \begin{vmatrix} G_{13} G_{24} & G_{23} G_{14} \\ f_{135} f_{245} & f_{235} f_{145} \end{vmatrix}.$$

Die erste Gleichung zeigt, dass man:

$$F_{\alpha\beta} = \pm \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{vmatrix}$$

setzen kann, wonach $F_{\alpha\beta}$ ausgedrückt ist als lineare Function von drei Grössen x, y, z. $F_{\alpha\beta} = 0$ ist die Bedingung, dass der Punkt x, y, z auf der Geraden liegt, die durch (α) und (β) hindurchgeht.

Die zweite sagt aus, dass $G_{\alpha\beta}$ diejenige quadratische Function von x, y, z ist, welche in allen sieben Punkten ausser (α) und (β) verschwindet. Die dritte endlich definirt H_α als kubische Function, die in allen sieben Punkten verschwindet, und zwar im Punkte (α) von der zweiten Ordnung.

x, y, z sind selbst durch eine Gleichung sechsten Grades $L = 0$ verbunden. Diese kann man in sehr vielen Formen darstellen, z. B.:

$$F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} G_{\alpha\gamma} G_{\beta\delta} - F_{\alpha\gamma} F_{\beta\delta} G_{\alpha\beta} G_{\gamma\delta} = 0.$$

Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{F_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} = \frac{v_\alpha v_\beta}{\sqrt{\pi}}$$

ist. Es ist leicht zu sehen, dass diese verschiedenen Gleichungen auf die eine geometrische Bedingung hinaus kommen: Die Curve $L = 0$ ist der geometrische Ort der Doppelpunkte aller Curven dritten Grades, die durch sieben feste Punkte hindurchgehn und einen Doppelpunkt besitzen.

Für $\rho = 4$ sind analoge Resultate noch nicht bekannt, ausser in dem speciellen Falle, wo eins der c gleich 0 ist.

§ 7.

Wir versuchen jetzt auch bei den Abel'schen Functionen von vier Variabeln die 136 Constanten c in Beziehung zu setzen mit einem Punktsystem der Geometrie. Den allgemeinen Fall, wo 10 unabhängige Parameter vorhanden sind, müssen wir allerdings beiseite lassen; es handelt sich nur um den Riemann'schen Specialfall, der durch die Gleichung

$$\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0$$

charakterisirt ist. Wir gehen aber nicht von diesem Gleichungssystem aus, sondern von dem, das am Schluss von § 4 aufgestellt war:

$$\sqrt[4]{s_1} \pm \sqrt[4]{s_2} \pm \sqrt[4]{s_3} = 0.$$

Zu jeder GÖPEL'schen Gruppe zweiter Ordnung gehörten 20 solche Gleichungen. Wenn man zunächst die Reihe der Functionen Q aufstellt:

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_6,$$

die Produkte ungerader Theta sind, so sind

$$Q_{123} = Q_{456}, \qquad Q_{124} = Q_{356}, \quad \text{etc.}$$

die 10 Produkte gerader Theta, die zu der gegebenen Gruppe gehören. Jeder der 256 Functionen θ entspricht eine bestimmte Constante c, jeder Function Q somit ein constanter Werth q, und die 20 Gleichungen, welche zwischen den 16 Constanten

$$q_1, q_2, \ldots, q_6, q_{123} \quad \text{etc.}$$

bestehen, können durch die eine Formel

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt[4]{q_a q_{a45} q_{a46} q_{a56}}) = 0$$

repräsentirt werden.

Da hier jedem Theta eine bestimmte Constante zugeordnet ist, so können wir nach der Methode von § 5 verfahren. Den vierten Potenzen der c_m — als den Grössen C_m — stellen wir ein System von Faktoren e_μ gegenüber, die den Permutationen entsprechen und die mit den c verbunden sind durch die Gleichungen

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu),$$

wo sich das Produkt erstreckt über alle für θ_m kritischen Permutationen μ.

Alsdann geht unsre Gleichung über in:

$$E_1 \pm E_2 \pm E_3 = 0,$$

wo E_a wiederum ein Produkt $\Pi(e_\mu)$ bedeutet, aber nur erstreckt über diejenigen Permutationen μ, die für sämmtliche 16 Faktoren des Ausdrucks

$$Q_a Q_{a45} Q_{a46} Q_{a56}$$

kritisch sind. Eine solche Permutation muss Q_a in ein Produkt gerader Theta, Q_{a45}, Q_{a46} und Q_{a56} in Produkte ungerader Theta überführen. Die einzigen Permutationen, welche diese Eigenschaft haben, sind $\beta\gamma$ und die

welche aus $\beta\gamma$ entstehen durch Hinzufügung eines Elements der gegebenen Göpel'schen Gruppe. Das Resultat ist demnach

$$\pi_{\beta\gamma} \pm \pi_{\gamma\alpha} \pm \pi_{\alpha\beta} = 0,$$

wo

$$\pi_\mu = \prod_x (e_{\mu x})$$

ist, das Produkt erstreckt über die vier Elemente der gegebenen Gruppe.

Nachdem soweit die Untersuchung allgemein geführt ist, legen wir von jetzt ab für die Bezeichnung der Theta eine geschlossene azygetische Reihe von 10 gleichartigen Functionen:

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_9 \quad \text{und} \quad \vartheta_0$$

zu Grunde. Alle Combinationen ungerader Ordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, 9, 0$ bezeichnen Functionen, die von gerader Ordnung dagegen Permutationen. Da zwei complementäre Combinationen jedesmal dasselbe Theta oder dieselbe Permutation bezeichnen, so können wir uns für die Theta auf die Combinationen erster, dritter und fünfter Ordnung beschränken, für die Permutationen auf die Combinationen zweiter und vierter Ordnung. Die Functionen ϑ_α der Hauptreihe sind gerade, $\vartheta_{\alpha\beta\gamma}$ ist eine ungerade, $\vartheta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ wiederum eine gerade Function. Das System der e_μ zerfällt in die Grössen $e_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Wir haben hier nicht mehr die volle Symmetrie der Voraussetzungen, da 10 Functionen vor den übrigen bevorzugt sind. Aber es muss jede Gleichung die wir zwischen den $e_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ aufstellen, richtig bleiben, wenn wir die Zahlen $1, 2, 3$ etc. beliebig unter einander vertauschen. Deshalb genügt es, einzelne Typen aufzustellen. Die Anzahl dieser Typen beträgt sechs, und da sie ohne Zweifel ein interessantes Gleichungssystem bilden, so wollen wir diese Typen vollständig angeben.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass es nur drei Typen giebt für die Göpel'sche Gruppe zweiter Ordnung. Es dürfen nämlich zwei Combinationen, die in der Gruppe vorkommen, immer nur eine gerade Anzahl von Elementen gemeinsam haben. Diese drei Typen sind:

I. (0, 78, 90, 7890),
II. (0, 1234, 5678, 90),
III. (0, 5678, 5690, 7890).

Für jede der definirten Gruppen haben wir eine Reihe von 6 Functionen Q aufzustellen, die Produkte ungerader Theta sind.

Dies sind für die erste Gruppe:

$$Q_{179}\,,\ Q_{279}\,,\ Q_{379}\,,\ Q_{479}\,,\ Q_{579}\,,\ Q_{679}\,;$$

für die zweite:

$$Q_{140}\,,\ Q_{240}\,,\ Q_{340}\,;\ Q_{580}\,,\ Q_{680}\,,\ Q_{780}\,;$$

für die dritte:

$$Q_{156}\,,\ Q_{256}\,,\ Q_{356}\,,\ Q_{456}\,;\ Q_{570}\,,\ Q_{670}\,.$$

Bei der ersten Gruppe ist es gleichgültig, welche der drei Glieder wir auswählen. Nehmen wir die drei ersten:

$$Q_{179}\,,\ Q_{279}\,,\ Q_{379}\,.$$

Q_{279} geht in Q_{379} über durch die Permutationen:

$$23\,,\ 2378\,,\ 2390\,,\ 237890 = 1456.$$

Wir haben demnach die Gleichung:

(a) $$\sum_{1,2,3} (\pm\, e_{23}\, e_{2378}\, e_{2390}\, e_{1456}) = 0.$$

Die Summe auf der linken Seite besteht aus drei Gliedern; das zweite und dritte entstehen aus dem hingeschriebenen durch Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3.

Bei der zweiten Gruppe sind zwei Typen aufzustellen. Wir können entweder auswählen:

$$Q_{140}\,,\ Q_{240}\,,\ Q_{340}\,.$$

Q_{240} geht in Q_{340} über durch die Permutationen:

$$23\,,\ 14\,,\ 2390\,,\ 1490.$$

Dies führt zu der Gleichung:

(b) $$\sum_{1,2,3} (\pm\, e_{23}\, e_{14}\, e_{2390}\, e_{1490}) = 0.$$

Oder wir können wählen:

$$Q_{140}\,,\ Q_{240}\,,\ Q_{780}\,.$$

Da Q_{240} in Q_{780} übergeht durch die Permutationen

$$2356\,,\ 2378\,,\ 1456\,,\ 1478,$$

so erhalten wir eine Gleichung, der wir die Form geben können:

$$\text{(c)}\qquad \begin{vmatrix} e_{1456}e_{1478} & e_{1356}e_{1378} \\ e_{2456}e_{2478} & e_{2356}e_{2378} \end{vmatrix} = \pm\, e_{12}\,e_{34}\,e_{1290}\,e_{3490}.$$

Die dritte Gruppe liefert drei verschiedne Typen, je nachdem wir aus der Reihe der sechs Functionen Q auswählen:

$$Q_{157}\,,\ Q_{256}\,,\ Q_{356},$$

oder:

$$Q_{156}\,,\ Q_{256}\,,\ Q_{570},$$

oder endlich:

$$Q_{156}\,,\ Q_{570}\,,\ Q_{670}.$$

Diese drei Gleichungen sind:

$$\text{(d)}\qquad \sum_{1,2,3}(\pm\, e_{23}\,e_{1456}\,e_{1478}\,e_{1490}) = 0,$$

$$\text{(e)}\qquad e_{12}\,e_{3456}\,e_{3478}\,e_{3490} = \sum_{1,2}(\pm\, e_{1679}\,e_{1589}\,e_{1570}\,e_{1680}),$$

$$\text{(f)}\qquad e_{56}\,e_{78}\,e_{90}\,e_{1234} = \pm \begin{vmatrix} e_{1579}e_{1580} & e_{1589}e_{1570} \\ e_{1679}e_{1680} & e_{1689}e_{1670} \end{vmatrix}.$$

Von den Formeln dieses Systems ist zunächst die zweite, (b), die wichtigste. Sie lässt sich noch vereinfachen. Wenn man statt der $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ einführt:

$$e_{\alpha\beta}\,e_{\alpha\gamma}\,e_{\alpha\delta}\,e_{\beta\gamma}\,e_{\beta\delta}\,e_{\gamma\delta}\,e_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

so geht sie über in:

$$\sum_{1,2,3}(\pm D_{2390}\,D_{1490}) = 0,$$

und dies zeigt, dass die $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ Determinanten sind. Es müssen sich zehn Werthsysteme

$$(A_a\,,\ B_a\,,\ C_a\,,\ D_a) \qquad {\scriptstyle (a=1,2,\ldots,0)}$$

oder besser:

$$(l_a a_a\,,\ l_a b_a\,,\ l_a c_a\,,\ l_a d_a)$$

angeben lassen, sodass allgemein:

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm\, l_\alpha l_\beta l_\gamma l_\delta \begin{vmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha & d_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta & d_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma & d_\gamma \\ a_\delta & b_\delta & c_\delta & d_\delta \end{vmatrix}$$

ist. Die 10 Werthsysteme $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha)$ fassen wir auf als die Coordinaten von 10 Punkten im Raume, und setzen jetzt:

$$e_{\alpha\beta}\, e_{\alpha\gamma} \ldots e_{\gamma\delta}\, e_{\alpha\beta\gamma\delta} = l_\alpha l_\beta l_\gamma l_\delta f_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

$f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist dann diejenige lineare Determinante, deren Verschwinden ausdrückt, dass vier der 10 Punkte in einer Ebene liegen.

Man kann nun in sämmtlichen Gleichungen die Faktoren $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ durch die neu eingeführten Grössen $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ausdrücken. Die Gleichungen enthalten dann ausser den f noch die Grössen $e_{\alpha\beta}$ und l_α. Es ist vortheilhaft, auch diese durch andere zu ersetzen.

Wir führen zunächst folgende Abkürzungen ein:

Mit e soll das Produkt aller 45 Grössen $e_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden;

mit e_α das Produkt derjenigen neun, deren Index die Zahl α enthält (sodass z. B. $e_0 = e_{01} e_{02} \ldots e_{09}$ ist);

endlich mit l das Produkt der 10 Grössen $l_1, l_2, \ldots, l_0$.

Wir setzen dann:

$$\xi_\alpha = \frac{l_\alpha^7}{e_\alpha^2}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 9, 0)$$

$$f_{\alpha\beta} = \frac{l}{e} \frac{e_\alpha^3 e_\beta^3}{l_\alpha^7 l_\beta^7 l_{\alpha\beta}^2}. \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 9, 0;\ \alpha \lesseqgtr \beta)$$

Am leichtesten lassen sich diese Substitutionen durchführen bei den Gleichungen (a) und (d). Sie gehen über, wie man ohne Mühe erkennt, in:

(a′) $$\sum_{1,2,3} (\pm\, \xi_1^4 f_{14} f_{15} f_{16} f_{2378} f_{2390} f_{1456}) = 0 \qquad .$$

und:

(d′) $$\sum_{1,2,3} (\pm\, \xi_1^2 f_{14} f_{1456} f_{1478} f_{1490}) = 0.$$

Die letztere Gleichung ist leicht zu deuten. Wir können sie zunächst so schreiben:

$$\sum_{\alpha=1,2,\ldots,0} \left(\pm \xi_\alpha^2 f_{\alpha x} f_{\alpha x\lambda\mu} f_{\alpha x\nu\rho} f_{\alpha x\sigma\nu}\right) = 0,$$

indem wir berücksichtigen, dass $f_{\alpha x\lambda\mu}$ eine lineare Function der Coordinaten des Punktes (α) ist, welche verschwindet, wenn dieser Punkt mit (x), (λ) oder (μ) zusammenfällt. Alle diese Gleichungen haben die Form:

$$\sum_\alpha \left(\pm \xi_\alpha^2 f_{\alpha x} H(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha)\right) = 0,$$

wo $H(x, y, z, t)$ eine Function dritten Grades bedeutet, die im Punkte (x) von der dritten Ordnung verschwindet. Es ist leicht zu sehen, dass diese Formel gelten muss, welche besondere derartige Function wir auch für H nehmen mögen. Denken wir uns nun, $H = 0$ sei die Gleichung einer Kegelfläche dritten Grades, deren Spitze im Punkte (x) liegt und die durch 8 der übrigen Grundpunkte hindurchgeht; dann zeigt die Formel, dass auch der letzte Punkt auf diesem Kegel liegt. Wir können daher unser System von 10 Punkten in folgender Weise geometrisch charakterisiren:

Zieht man von irgend einem der 10 Punkte aus Strahlen nach den neun übrigen, so bilden diese neun Geraden immer den vollständigen Durchschnitt zweier Kegel dritten Grades.

Es giebt auch eine geometrische Relation, welche die gegenseitige Lage von acht der zehn Punkte charakterisirt. Nehmen wir die Gleichung (f) unsres Systems und drücken auch in dieser die Grössen $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und $e_{\alpha\beta}$ durch $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $f_{\alpha\beta}$ und die ξ_α aus. Nach einer kleiner Rechnung ergiebt sich:

$$(\text{f}') \qquad \begin{vmatrix} f_{1579} f_{1580} & f_{1589} f_{1570} \\ f_{1679} f_{1680} & f_{1689} f_{1670} \end{vmatrix} = \frac{\xi_1^3 \xi_2 \xi_3 \xi_4}{\xi_5 \xi_6 \xi_7 \xi_8 \xi_9 \xi_0} f_{12} f_{13} f_{14} f_{1234}.$$

Der Ausdruck links ist hier nichts andres als diejenige aus den Werthsystemen (a, b, c, d) gebildete quadratische Determinante, deren Verschwinden anzeigt, dass ein Kegel zweiten Grades existirt, mit der Spitze im Punkt (1), der durch die Punkte 5, 6, 7, 8, 9, 0 hindurchgeht. Für diese Function wählen wir die Bezeichnung

$$g_{234,1}.$$

(2), (3) und (4) sind diejenigen Punkte, deren Coordinaten in dem

Ausdruck nicht vorkommen. Wir haben dann die eigenthümliche Relation:

$$g_{234,1} = \frac{\xi_1^3 \xi_2 \xi_3 \xi_4 f_{12} f_{13} f_{14} f_{1234}}{\xi_5 \xi_6 \xi_7 \xi_8 \xi_9 \xi_0},$$

welche natürlich bestehen bleibt bei jeder Vertauschung der 10 Zahlen.

Durch sie ist ein Mittel gegeben, auch die Faktoren $f_{\alpha\beta}$ und ξ_α auszudrücken als Functionen der Werthsysteme (a, b, c, d). Aber sie giebt zugleich die Möglichkeit, eine Relation zwischen je acht der 10 Punkte aufzustellen. Diese Relation ist:

$$g_{145,2}\, g_{245,3}\, g_{345,1} = g_{245,1}\, g_{345,2}\, g_{145,3}\,.$$

In ihr kommen die Coordinaten der Punkte (4) und (5) nicht vor, und man sieht ohne weiteres, dass sie richtig ist, wenn man vermöge der obigen Formel $g_{\alpha\beta\gamma,\delta}$ durch $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ausdrückt.

Es ist dies eine Relation zwischen acht Punkten, die ich schon in einer früheren Arbeit (CRELLE's Journal, Bd. 105, S. 273) besprochen habe; sie sagt aus, dass eine Fläche vierten Grades existirt, welche die acht Punkte zu Doppelpunkten hat. Eine solche Fläche kann noch zwei weitere Doppelpunkte besitzen; dies müssen offenbar die beiden übrigen Punkte sein. Daher lässt sich das System der zehn Punkte charakterisiren als das der zehn Doppelpunkte einer Fläche vierten Grades.

Es hat vielleicht noch ein gewisses Interesse, die Gleichungen

$$\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0$$

umzusetzen in Relationen zwischen den e oder den f.

Es ist klar, dass für die Faktoren von r_1 nur die Permutationen kritisch sind, die r_2 in r_3 überführen. Die Gleichung geht daher über in

$$\pi_{23} \pm \pi_{31} \pm \pi_{12} = 0,$$

wo $\pi_{\alpha\beta}$ ein Produkt von acht Faktoren e bedeutet, nämlich:

$$\pi_{\alpha\beta} = \prod_{(x)} (e_{\alpha\beta x});$$

es erstreckt sich über alle Elemente x der GÖPEL'schen Gruppe dritter Ordnung, die der Gleichung zu Grunde liegt.

Demnach sind diese Gleichungen zwischen den e weniger einfach als die vorhin betrachteten. Erleichtert wird allerdings ihre Aufstellung da-

durch, dass für die Göpel'sche Gruppe dritter Ordnung nur zwei Typen existieren, nämlich:

$$(0, 56, 78, 90, 5678, 5690, 7890, 1234),$$

und:

$$(0, 1234, 1256, 1278, 3456, 3478, 5678, 90).$$

Für die erste der beiden Gruppen sind

$$\theta_{14579}, \theta_{24579}, \theta_{34579}$$

drei gerade Theta, die gerade bleiben bei den sämmtlichen Permutationen der Gruppe; für die zweite haben

$$\theta_9, \theta_{13579}, \theta_{23579}$$

dieselbe Eigenschaft. Dies führt zu den beiden Gleichungen:

$$\sum_{1,2,3} (\pm e_{23} e_{14} e_{2356} e_{1456} e_{2378} e_{1478} e_{2390} e_{1490}) = 0,$$

und:

$$e_{12} e_{34} e_{56} e_{78} e_{1290} e_{3490} e_{5690} e_{7890} = \pm \begin{vmatrix} e_{1357} e_{\cdot 467} e_{1458} e_{1368} & e_{1457} e_{1367} e_{1358} e_{1468} \\ e_{2357} e_{2467} e_{2458} e_{2368} & e_{2457} e_{2367} e_{2358} e_{2468} \end{vmatrix}.$$

Wenn man nun in diesen beiden Gleichungen die Faktoren $e_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ausdrückt durch die entsprechenden Grössen $f_{\alpha\beta}$ und $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$, so ergiebt sich das Resultat dass für die f genau dieselben Gleichungen bestehen, wie für die e.

Daraus ist der Schluss zu ziehen, dass die Ausdrücke für die Anfangswerthe der 136 geraden Theta

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu)$$

richtig bleiben, wenn man jeden Faktor e durch das entsprechende f ersetzt. Wir können die Gleichungen aufstellen:

$$c_m^4 = R\Pi(f_\mu);$$

das Produkt erstreckt sich jedesmal über alle 120 Permutationen μ, die θ_m in eine ungerade Function überführen. Damit sind die Grössen c_m^4 ausgedrückt durch Produkte von Faktoren, deren Haupttheil durch die linearen Determinanten $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ gebildet wird.

NOTE SUR LES ZÉROS DE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN

PAR

J.-P. GRAM

à COPENHAGUE.

Le génie d'ABEL se manifesta non seulement dans la force gigantique qu'il sût appliquer pour approfondir les problèmes qu'il prit pour objets de ses recherches, mais aussi bien dans l'intuition remarquable qui lui fit saisir précisement ces problèmes dont la solution devait conduire à des résultats féconds pour l'avenir. Il ne doit donc pas nous étonner de trouver ABEL dans la liste des analystes qui ont préparé la terre pour la théorie de la fonction Zéta, une des plus remarquables acquisitions de l'analyse moderne.

A la vérité les Oeuvres d'ABEL renferment plusieurs mémoires concernant cette matière; surtout ceux qui portent les numéros II et IV du Tome 1, et I du Tome 2 de l'édition nouvelle contiennent assez de choses dignes d'intérêt. Sans entrer dans des détails je rappellerai particulièrement l'attention sur deux formules fondamentales qu'on y trouve.

La première est l'égalité qui sous sa forme moderne s'écrit comme suit:

$$\text{(I)} \qquad \Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx,$$

sur laquelle ABEL est conduit en cherchant une expression des nombres de BERNOULLI au moyen d'intégrales définies. Comme on sait, c'est cette intégrale que RIEMANN a prise pour départ de sa théorie générale et plus

tard feu M. HERMITE[1] montra comment on en peut déduire une expression qui conserve sa validité sur le plan tout entier. Il suffit de faire la décomposition $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ pour établir la formule générale:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{B_3}{4}\cdot\frac{1}{s+3} + \dots$$

$$+ \int_1^\infty \frac{dx}{x(e^x-1)}\left(1 + \frac{s}{1}lx + \frac{s^2}{2}(lx)^2 + \dots\right)dx = I_1 + I_2,$$

B_1, B_3, ... désignant les nombres de BERNOULLI, I_1 et I_2 les parties correspondantes à chaque intégrale respectivement.

L'integrale (I) n'a aucun sens que quand la partie réelle de s surpasse l'unité positive. Quand $0 < R(s) < 1$ l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)x^{s-1}dx$$

reste finie et a la valeur $I_1 - \frac{1}{s-1}$. En même temps $I_2 + \frac{1}{s-1}$ peut s'écrire

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)x^{s-1}dx,$$

donc

$$\text{(I')} \qquad \Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)x^{s-1}dt, \quad \text{pour } 0 < R(s) < 1.$$

Également

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)x^{s-1}dx, \qquad \text{pour } -1 < R(s) < 0,$$

etc.

[1] Comptes rendus 1885, p. 112.

Évidemment cette transposition simple qui nous a donné l'extension de la formule (I) est d'une plus grande portée. Appliquée à la fonction $\Gamma(s)$ elle nous donne:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty (e^{-x} - 1)x^{s-1}dx \qquad (-1 < R(s) < 0),$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \left(e^{-x} - 1 + \frac{x}{1}\right)x^{s-1}dx \qquad (-2 < R(s) < -1),$$

et ainsi de suite.

Une autre formule de grande valeur pour la théorie de la fonction Zéta et qui tout-à-fait appartient à ABEL est la formule remarquable de sommation qu'il écrit ainsi:

$$\text{(II)} \qquad \Sigma\varphi(x) = \int \varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) + 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x + ti) - \varphi(x - ti)}{2i}.$$

En posant $\varphi(x) = x^{-s} (s > 1)$ et en prenant la somme de $x = n$ à $x = \infty$, on en déduit

$$(n + 1)^{-s} + (n + 2)^{-s} + \dots$$

$$= \int_n^\infty x^{-s}\,dx - \frac{1}{2}n^{-s} + 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{(n + ti)^{-s} - (n - ti)^{-s}}{2i},$$

la forme particulière de (II) qu'il faut appliquer dans la recherche de $\zeta(s)$. En outre, la valeur principale de cette formule consiste en ce qu'elle donne le moyen pour évaluer la reste dans la formule générale de sommation de EULER et MACLAURIN, qui fournit le procédé le plus expéditif pour le calcul de $\zeta(s)$.

Il ne semble donc pas mal à propos dans ce volume des Acta Mathematica, déstiné à honorer le nom immortel de ABEL, d'insérer la note suivante qui certainement touche un des problèmes les plus intricats du jour mais dont la méthode se rattache assez étroitement aux recherches

d'ABEL lui-même. Le mémoire qui suit a été présenté a l'Académie de Copenhague le 7 février de cette année et est inséré dans le premier fascicule du Bulletin de cette Académie pour 1902.

Malgré les nombreuses études qui ont paru dans ces dernières années sur la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN, la question de ses racines imaginaires attend toujours une solution. Les difficultés qu'elle présente, et qui proviennent de ce fait qu'on ne possède pas une expression pratique, explicite ou implicite, pouvant être prise comme point de départ d'une étude approfondie générale de la dite fonction, ont été jusqu'ici presque insurmontables.

Pour obtenir des résultats qui puissent au moins servir à donner des renseignements utiles pour guider dans les recherches théoriques, je me suis occupé depuis quelque temps des calculs numériques dont le but principal était de créer une table numérique donnant les valeurs de la fonction $\xi(t)$ pour une série de valeurs réelles de l'argument.

J'ai publié en 1895[1] les valeurs numériques des coefficients qui entrent dans les séries représentant les fonctions $\xi(t)$ et $\zeta(s)$, et j'en ai tiré quelques conclusions préalables sur les plus petites racines α de $\xi(t) = 0$, qui furent déterminées ainsi:

$$\alpha_1 = 14.135, \qquad \alpha_2 = 20.82, \qquad \alpha_3 = 25.1.$$

Mais quoique les coefficients eussent été calculés avec 16 décimales, ce calcul ne suffit pas à déterminer les α avec une exactitude satisfaisante pour des usages ultérieurs. Afin d'obtenir au moins α_1 plus correctement, j'ai donc repris le travail en commençant par calculer directement $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$, $\zeta'\left(\frac{1}{2}\right)$, $\zeta''\left(\frac{1}{2}\right)$ avec 28 décimales correctes. Cela m'a donné $\xi(0)$ et $\xi''(0)$ et ensuite $\left(D_t^2 \log \xi(t)\right)_{t=0}$ avec la même approximation. Enfin j'ai calculé $\log \xi(it)$ pour $t = \pm \frac{2n+1}{2}$, $n < 15$, me procurant ainsi le moyen d'établir une interpolation qui m'a donné successivement les coefficients supérieurs

[1] *Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.* Bulletin de l'Académie de Copenhague 1895, p. 303.

dans la série de $\log_e \xi(t)$. Pour la méthode, je me bornerai à renvoyer au mémoire cité, le résultat obtenu fut la série suivante:

$$
\begin{aligned}
-\log_e \xi(t) = 0.6989'2226''7945'''3314^{IV}1529^{V}8362^{VI}0204^{VII}81 \\
+ 231'0499''3115'''4189^{IV}7078^{V}8932^{VI}3871^{VII}31\, t^2 \\
+ 1858''6299'''6426^{IV}3484^{V}28 \quad . t^4 \\
+ 4''8057'''9771^{IV}3365^{V}663 \quad . t^6 \\
+ 165'''7579^{IV}2006^{V}235 \quad . t^8 \\
+ 6427^{IV}3282^{V}993 \quad . t^{10} \\
+ 26^{IV}4615^{V}5724^{VI} \quad . t^{12} \\
+ 1129^{V}0460^{VI}5 \quad . t^{14} \\
+ 4^{V}9332^{VI}2 \quad . t^{16} \\
+ 220^{VI}6 \quad . t^{18}
\end{aligned}
$$

Mais ces coefficients plus exacts ne permettent pas encore une détermination de α_1 essentiellement meilleure que celle qui avait été obtenue précédemment, soit parce qu'on ne peut pas se fier absolument aux deux derniers chiffres des coefficients trouvés, soit parcequ'il serait nécessaire pour le calcul de α_1 au moyen des fonctions symétriques $\sum \alpha^{-2n}$ d'avoir $\sum \alpha^{-2n}$ pour une valeur de n plus grande encore, ou au moins d'avoir une connaissance provisoire des valeurs de α_2, α_3 etc.

Ces difficultés m'ayant paru insurmontables à moins de calculs immenses, j'abandonnai ces recherches en espérant qu'un autre trouverait quelque méthode pouvant servir soit au calcul des coefficients de $\xi(t)$ soit au calcul direct des racines α. Mais, autant que je sache, aucune méthode de ce genre n'a encore été publiée.

Quant aux α, il me restait toujours à essayer de calculer directement les racines de $\zeta(s) = 0$, autrement dit de déterminer les valeurs de t réelles ou imaginaires qui donnent $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = 0$. Toutefois cette entreprise me sembla inutile parce que je doutais que la formule approximative qu'il faudrait appliquer donnât des développements assez convergents pour les calculs dont il s'agit ici. Néanmoins l'automne dernier je me suis décidé à faire cet essai, et j'ai été frappé de la facilité avec laquelle il a réussi. Certainement la détermination d'une racine α demande bien des efforts, mais théoriquement il n'y a pas de difficulté et la méthode permet

pour ainsi dire de calculer autant de racines qu'on le veut, de façon à rendre possible le calcul de $\zeta(s)$ pour toute valeur de s, pourvu que ce calcul soit pratiquement exigible.

En partant de la définition

$$\zeta(s) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left[\sum_1^n n^{-s} - \frac{n^{1-s}}{1-s}\right],$$

la partie réelle de s étant supposée > 0, et en calculant la somme $\sum_n^\infty n^{-s}$ au moyen de la formule générale de sommation, on obtient la formule connue:

$$(1)\qquad \zeta(s) = \sum_1^n n^{-s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2}n^{-s} + \frac{s}{1\,.\,2}B_1 n^{-s-1} - \frac{s(s+1)(s+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}B_3 n^{-s-3} + \ldots,$$

B_1, B_3, ... représentant les nombres de BERNOULLI. Cette formule est généralement semiconvergente, et donne pour s réelle une exactitude d'autant plus grande que n est supposé plus grand. Par exemple $n = 20$ donne $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ correctement avec plus de 30 décimales.

Mais comment se comporte cette formule pour des valeurs complexes de s?

En l'écrivant sous la forme

$$\zeta(s) = \sum_1^n n^{-s} - n^{-s}\left[\frac{n}{1-s} + \frac{1}{2} - \frac{s}{2n}(B_1 + R)\right],$$

on voit qu'il s'agit en premier lieu d'estimer la grandeur du reste R, où

$$R = -\frac{(s+1)(s+2)}{3\,.\,4\,.\,n^2}B_3 + \frac{(s+1)(s+2)}{3\,.\,4\,.\,n^2}\cdot\frac{(s+3)(s+4)}{5\,.\,6\,.\,n^2}B_5 \ldots$$

Considérons séparément les facteurs

$$A_1 = -\frac{(s+1)(s+2)}{3\,.\,4\,.\,n^2},\qquad A_2 = -\frac{(s+3)(s+4)}{5\,.\,6\,.\,n^2}\ \text{etc.},$$

dont l'introduction permet d'écrire:

$$R = A_1 B_3 + A_1 A_2 B_5 + A_1 A_2 A_3 B_7 + \ldots,$$

et posons: $s = x + yi$. Alors on obtient:

$$A_\nu = \frac{y^2 + \frac{1}{4} - \left(x + 2\nu - \frac{1}{2}\right)^2 - iy(2x + 4\nu - 1)}{(2\nu + 1)(2\nu + 2)n^2}.$$

Il est évident qu'on pourra toujours choisir pour n un nombre si grand que les premiers A auront leurs parties réelles comme leurs parties imaginaires égales à des fractions propres, et que les produits successifs des mêmes A formeront alors une série décroissante.

La propriété caractéristique des séries semiconvergentes subsiste donc pour la série R et par conséquent aussi pour la série qui représente $\zeta(s)$.

Dans le cas actuel il s'agit de calculer la valeur de $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)$.

Pour $x = \frac{1}{2}$, $y = t$, on a:

$$A_\nu = \frac{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right) - 4\nu^2 - 4\nu ti}{(2\nu + 1)(2\nu + 2)n^2},$$

d'où, en posant $t^2 + \frac{1}{4} = T$:

$$A_1 = \frac{(T - 4) - 4ti}{3 \cdot 4 \cdot n^2},$$

$$A_2 = \frac{(T - 16) - 8ti}{5 \cdot 6 \cdot n^2},$$

$$A_3 = \frac{(T - 36) - 12ti}{7 \cdot 8 \cdot n^2} \text{ etc.}$$

La formule définitive sera alors:

$$(2) \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = \sum_1^n n^{-\frac{1}{2}}(\cos t \log n - i \sin t \log n) - n^{\frac{1}{2}}(\cos t \log n - i \sin t \log n)$$

$$\times \left[\frac{n + 2nti}{T} + \frac{1}{2} - \frac{1 + 2ti}{4n}(B_1 + A_1 B_3 + A_1 A_2 B_5 + \ldots)\right]$$

$$= C(t) + iS(t),$$

en désignant respectivement par $C(t)$ et $S(t)$ la partie réelle et la partie imaginaire.

Pour calculer au moyen de (2) $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$ avec au moins 7 décimales correctes, il suffit de prendre $n = 20$, quand t ne surpasse pas 50. Afin d'appliquer cette formule au calcul des racines α, on commence par dresser une petite table des valeurs successives de $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$, pour voir s'il y aura des valeurs de t qui semblent pouvoir annuler simultanément $C(t)$ et $S(t)$. Ayant trouvé ainsi des limites assez vagues, on a en premier lieu à calculer ζ pour quelques valeurs intermédiaires telles qu'on puisse obtenir par interpolation linéaire une approximation meilleure à la racine cherchée. En se servant des tables logarithmiques à 5 décimales on peut obtenir au moins 4 décimales correctes de α. Et si l'on avait trouvé qu'une α est située entre deux valeurs t_1 et t_2 ne différant que par 10^{-4}, un calcul réitéré avec 7 décimales donnerait les deux chiffres suivants presque exactement, à moins que l'accumulation des fautes dans les derniers chiffres ne s'y opposât. Quant aux valeurs maxima de $C(t)$ et de $S(t)$ elles ne s'élèvent qu'à peu d'unités.

On trouve par ex.:

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+14.1347i\right) = +0.0000033 - 0.0000199i$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+14.1348i\right) = -0.0000092 + 0.0000587i,$$

et si l'on pose $\alpha_1 = 14.1347 + k \,.\, 10^{-4}$, on trouve par interpolation:

$$k_1 = \frac{33}{125} = 0.264\,; \quad k_2 = \frac{199}{786} = 0.253.$$

De ces deux valeurs de la correction, k_2 est la meilleure; un calcul fait avec 8 décimales m'a donné $\alpha_1 = 14.1347251$; mais le dernier chiffre est douteux.

Comme on le voit, la détermination d'une racine exige certainement bien des calculs, mais grâce à l'aide qu'a bien voulu me prêter M. H. S. Nielsen pour le calcul final, je suis parvenu à déterminer les 10 premières racines de l'équation $\xi(t) = 0$, dont voici les valeurs en 8 chiffres:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 14.134725 \\
\alpha_2 &= 21.022040 \\
\alpha_3 &= 25.010856 \\
\alpha_4 &= 30.424878 \\
\alpha_5 &= 32.935057 \\
\alpha_6 &= 37.586176 \\
\alpha_7 &= 40.918720 \\
\alpha_8 &= 43.327073 \\
\alpha_9 &= 48.005150 \\
\alpha_{10} &= 49.773832
\end{aligned}$$

Le dernier chiffre seulement est un peu incertain; du reste la détermination double au moyen de $C(t)$ et de $S(t)$ donne une bonne preuve du calcul. Les racines trouvées sont toutes celles qui sont inférieures à 50; les plus proches seront d'environ les valeurs suivantes:

$$\alpha_{11} = 52.8\,,\ \alpha_{12} = 56.4\,,\ \alpha_{13} = 59.4\,,\ \alpha_{14} = 61.0\,,\ \alpha_{15} = 65.0.$$

Elles fournissent un contrôle au calcul des coefficients de $\log \xi(t)$ donnés plus haut. Car on trouve respectivement:

$$\sum_1^{10} \alpha_\nu^{-12} = 158^{IV}7693^{V}0\,, \qquad \sum_1^{\infty} \alpha_\nu^{-12} = 158^{IV}7693^{V}4344\,,$$

$$\sum_1^{10} \alpha_\nu^{-14} = 7903^{V}3261^{VI}\,, \qquad \sum_1^{\infty} \alpha_\nu^{-14} = 7903^{V}3223^{VI}5\,,$$

$$\sum_1^{10} \alpha^{-16} = 39^{V}4647^{VI}16\,, \qquad \sum_1^{\infty} \alpha^{-16} = 39^{V}4657^{VI}6\,,$$

d'où l'on peut inférer que les coefficients de $\log \xi(t)$ donnés plus haut sont corrects aux deux derniers chiffres près.

On peut conclure de notre calcul que les quinze premières racines de $\xi(t) = 0$ sont réelles, sans quoi, leurs parties imaginaires seraient très insignifiantes. Que ces racines sont véritablement réelles, c'est ce que nous prouverons ci-dessous. On ne voit pas de raison pour que les racines suivantes se comporteraient autrement. En plus des renseignements que le

calcul achevé m'a fournis sur la variation de la fonction $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$, il rend aussi possible le calcul de $\log \xi(t)$ pour $t < 50$ au moyen de la série donnée plus haut et des valeurs trouvées pour les premières racines. Enfin la connaissance de ces racines donne le moyen d'aborder l'étude des termes périodiques dans les formules analytiques exprimant des fonctions des nombres premiers.

Mais le résultat le plus intéressant qu'ait donné ce calcul consiste en ce qu'il révèle l'irrégularité qui se trouve dans la série des α. Il est très probable que ces racines sont liées intimement aux nombres premiers. La recherche de cette dépendance, c'est-à-dire de la manière dont une α donnée est exprimée au moyen des nombres premiers, sera l'objet d'études ultérieures.

A côté des valeurs des α, mon calcul m'a fournis des renseignements sur un autre point digne d'intérêt. C'est qu'il se trouve aussi des valeurs réelles de t qui font annuler soit la partie réelle soit la partie imaginaire de $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$, mais différentes des α qui font annuler simultanément les deux parties.

Posons

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right) = C(t) + iS(t) = me^{i\varphi(t)}, \tag{3}$$

m étant le module pris avec un signe convenable, $C(t)$ et $S(t)$ des fonctions réelles de t. Pour avoir simultanément $C = 0$ et $S = 0$, il faut que $m = 0$. En outre $C = 0$ quand $\cos\varphi = 0$, $S = 0$ quand $\sin\varphi = 0$. Il n'est pas difficile d'exprimer φ en fonction de t.

L'équation fonctionelle de Riemann

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

peut s'écrire:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s).$$

Donc:

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s), \tag{4}$$

et pour $s = \frac{1}{2} + ti$:

(5) $$\frac{\zeta\left(\frac{1}{2} - ti\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)} = e^{2i\varphi} = 2^{\frac{1}{2} - ti}\, \pi^{-\frac{1}{2} - ti} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} ti\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + ti\right).$$

Pour trouver φ on n'a donc qu'à chercher le logarithme du second membre, ce qui donne:

$$-2\varphi i = -ti \log 2\pi + \frac{1}{2} \log \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} ti\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} ti\right)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + ti\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ti\right)}.$$

Mais

$$\frac{1}{2} \log \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} ti\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} ti\right)} = i\left(\operatorname{arctg} e^{-\pi t} - \frac{\pi}{4}\right),$$

et

$$\frac{1}{2} \log \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + ti\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ti\right)}$$

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{\frac{1}{2} + ti}{\frac{1}{2} - ti} + \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \left[2ti \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - \log \frac{\frac{1}{2} + \nu + ti}{\frac{1}{2} + \nu - ti} \right]$$

$$= -i \operatorname{arctg} 2t + i \sum_{1}^{\infty} \left[t \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - \operatorname{arctg} \frac{t}{\nu + \frac{1}{2}} \right]$$

$$= i \operatorname{Lim} \left[t \log(\omega + 1) - \sum_{0}^{\omega} \operatorname{arctg} \frac{t}{\nu + \frac{1}{2}} \right]_{\omega = \infty} = iv.$$

Ainsi on aura:

(6) $$-2\varphi = -t \log 2\pi + \operatorname{arctg} e^{-\pi t} - \frac{\pi}{4} + v.$$

La quantité désignée par v peut être calculée approximativement au moyen de la formule générale de sommation:

$$\sum_0^\omega f(\nu) = \int_0^\omega f(\nu)d\nu - \frac{1}{2}\big(f(\omega) - f(0)\big)$$
$$+ \frac{B_1}{1 \cdot 2}\big(f'(\omega) - f'(0)\big) - \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\big(f'''(\omega) - f'''(0)\big) + \dots .$$

Mais

$$\int_0^\omega \operatorname{arctg} \frac{t}{\nu + \frac{1}{2}} d\nu = \left(\omega + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} + \frac{t}{2} \log\left(t^2 + \left(\omega + \frac{1}{2}\right)^2\right)$$
$$- \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2t - \frac{t}{2} \log\left(t^2 + \frac{1}{4}\right).$$

$f(\omega), f'(\omega), f'''(\omega) \dots$ s'annuleront pour $\omega = \infty$; les autres termes contenant ω se réduisent donc à:

$$t \log(\omega + 1) - \left(\omega + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{\omega + \frac{1}{2}} - \frac{t}{2} \log\left(t^2 + \left(\omega + \frac{1}{2}\right)^2\right),$$

dont la limite pour $\omega = \infty$ sera égale à $-t$. Alors on obtient ensuite:

$$v = \frac{t}{2} \log\left(t^2 + \frac{1}{4}\right) - t - \frac{B_1}{2} \cdot \frac{t}{t^2 + \frac{1}{4}} + \frac{B_3}{12}\left(\frac{t}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)^3} - \frac{t}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)^2}\right) + \dots$$

et

$$(7) \quad -2\varphi(t) = \frac{t}{2} \log\left(t^2 + \frac{1}{4}\right) - t(1 + \log 2\pi) + \operatorname{arctg} e^{-\pi t} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{12} \frac{t}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)},$$

en négligeant les termes d'ordres inférieures à $\frac{1}{t}$.

On voit que $\varphi(t) = -\varphi(-t)$, $\varphi(0) = 0$. Du reste la petite table suivante donne les meilleurs renseignements sur la variation de $\varphi(t)$:

$t = 0$	$\varphi(t) = 0.000$
» 5	» $+ 3.460$
» 10	» $+ 3.067$
» 15	» $+ 1.365$
» 20	» $- 1.187$
» 25	» $- 4.371$
» 30	» $- 8.058$
» 35	» $- 12.164$
» 40	» $- 16.628$
» 45	» $- 21.405$
» 50	» $- 26.461$
» 55	» $- 31.766$
» 60	» $- 37.300$

Pour des valeurs de t pas trop petites, ce sont les premiers termes de (7) qui en premier lieu font déterminer la grandeur de $\varphi(t)$. En se bornant à ces termes et en substituant $\log t$ à $\frac{1}{2}\log\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)$, on obtient approximativement:

$$- 2\varphi(t) = t\log t - t(1 + \log 2\pi) - \frac{\pi}{4},$$

ou bien

$$(8) \qquad -\frac{\varphi(t)}{\pi} = \frac{t}{2\pi}\left(\log\frac{t}{2\pi} - 1\right) - \frac{1}{8},$$

l'erreur commise étant de l'ordre $\frac{1}{t}$.

Cela suffit pour déterminer les racines propres de $C(t) = 0$ et de $S(t) = 0$. En rappellant que

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = C(t) + iS(t) = me^{i\varphi(t)},$$

on voit que $C(t) = 0$ comporte $\cos\varphi(t) = 0$, c'est à dire:

$$\pm\varphi(t) = \frac{(2n + 1)\pi}{2},$$

tandisque $S(t) = 0$ exige que

$$\pm \varphi(t) = n\pi,$$

n étant un nombre entier positif ou négatif ou bien zéro.

Si l'on désigne par β les racines de $C(t) = 0$, par γ celles de $S(t) = 0$, et qui sont différentes des α, on aura donc, avec une grande approximation, pour les racines positives:

$$\frac{\beta}{2\pi}\left(\log\frac{\beta}{2\pi} - 1\right) - \frac{1}{8} = \frac{2n+1}{2}, \tag{9}$$

$$\frac{\gamma}{2\pi}\left(\log\frac{\gamma}{2\pi} - 1\right) - \frac{1}{8} = n. \tag{10}$$

Considérons particulièrement les γ; alors on trouve:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 3.5 \text{ pour } n = -1, \\ \gamma_2 &= 9.6 \quad » \quad n = -1, \\ \gamma_3 &= 17.8 \quad » \quad n = 0, \\ \gamma_4 &= 23.2 \quad » \quad n = 1. \end{aligned}$$

Les γ suivantes correspondent aux nombres successifs $n = 2, 3, 4$ etc. On voit par là que le nombre des racines γ qui sont inférieures à une limite donnée N et plus grandes que 10 sera exprimé à peu près par le plus grand nombre entier contenu dans l'expression:

$$\frac{N}{2\pi}\left(\log\frac{N}{2\pi} - 1\right) + \frac{7}{8}.$$

Toutes les racines γ ainsi que les β seront évidemment réelles.

Rappelons que M. v. Mangoldt a démontré que le nombre des racines α dont la partie réelle ne surpasse pas N est représenté par l'expression

$$\frac{N}{2\pi}\left(\log\frac{N}{2\pi} - 1\right) + \frac{5}{4} \pm \varepsilon,$$

où $\varepsilon < 0.34 (\log N)^2 + 1.34 \log N + 1.33$; il suit de là que les γ et les α (ou les parties réelles de celles-ci) se suivent de très près. — Pour les quinze premières α il arrive que toutes les α sont séparées par les valeurs des γ, mais non par les valeurs des β. Il va sans dire que les β et les γ se suivent alternativement.

Après avoir ainsi trouvé toutes les valeurs de t qui annulent une des fonctions $C(t)$ et $S(t)$ seulement, il est clair que toute autre valeur de t qui fait annuler ou $C(t)$ ou $S(t)$ doit annuler m et sera donc une racine α qui donne aussi bien $C(\alpha) = 0$ que $S(\alpha) = 0$. Notre calcul prouve sans contredit qu'il y à des valeurs de t réelles différentes des γ et qui font changer le signe de $S(t)$. Ces valeurs font donc annuler $S(t)$ et seront des racines véritables de $\xi(t) = 0$. Il est donc certain que les premières α sont réelles.

De l'identité

$$C + iS = e^{2i\varphi}(C - iS)$$

on obtient par différentiation par rapport à t:

$$(11) \qquad C' + iS' = e^{2i\varphi}(C' - iS') + 2i\varphi'(C - iS)e^{2i\varphi}.$$

Quand $C = S = 0$, on aura donc:

$$C'(\alpha) + iS'(\alpha) = e^{2i\varphi(\alpha)}\big(C'(\alpha) - iS'(\alpha)\big),$$

d'où:

$$(12) \qquad \frac{S'(\alpha)}{C'(\alpha)} = \operatorname{tg}\varphi(\alpha),$$

formule qui m'a fourni un moyen de contrôle sur mon calcul.

Quand $C = 0$, $S \gtrless 0$, $e^{2i\varphi} = -1$, on trouve d'après (11):

$$(13) \qquad C'(\beta) = -\varphi'(\beta)S(\beta),$$

tandisque $S = 0$, $C \gtrless 0$, $e^{2i\varphi} = 1$ donne:

$$(14) \qquad S'(\gamma) = \varphi'(\gamma)C(\gamma).$$

Quand $t > 7$, $\varphi'(t)$ est toujours négatif; on a donc pour les racines correspondantes le théorème suivant:

$C'(\beta)$ a toujours le même signe que $S(\beta)$; $S'(\gamma)$ a le signe opposé à celui de $C(\gamma)$.

Si donc $C(\gamma)$ conserve le même signe pour deux valeurs consécutives de γ, savoir γ_ν et $\gamma_{\nu+1}$, $S'(\gamma_{\nu+1})$ aura elle-même le même signe que $S'(\gamma)$. Mais comme $S(\gamma_\nu) = S(\gamma_{\nu+1}) = 0$, il faut donc que $S(t)$ ait passé par la valeur zéro

un nombre impair de fois dans cet intervalle. Autrement dit il se trouvera alors un nombre impair de racines réelles α entre γ_ν et $\gamma_{\nu+1}$; il y en aura donc au moins une comprise dans ces limites.

Ce théorème peut rendre de bons services dans la recherche numérique. Pour l'utiliser aussi dans la théorie, il faudrait d'abord trouver une méthode pour déterminer le signe de $C(\gamma)$ sans calcul numérique, mais pour le moment cela paraît assez difficile. Pour les γ dans l'intervalle de 10 à 65, $C(\gamma)$ est toujours positif. Cela tient probablement à ce fait que $C(t)$ dans les plus grandes parties du dit intervalle est positif. Sans doute la raison en est que le premier terme de la somme $\sum_1^n n^{-\frac{1}{2}} \cos(t \log n)$, savoir l'unité positive, produit un surplus en faveur des termes positifs. Si cela est juste, on peut inférer que l'équilibre ne s'établira que peu à peu, de sorte que la même règle sur la répartition des α par rapport aux γ se maintiendra aussi pour les α suivantes les plus rapprochées de α_{15}.

SUR UNE FORMULE SOMMATOIRE GÉNÉRALE

PAR

ERNST LINDELÖF
à HELSINGFORS.

1. Dans son Mémoire: *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies,* daté de 1823, ABEL a établi la formule suivante[1]:

$$(1)\qquad \sum\varphi(x) = \int\varphi(x)dx - \frac{1}{2}\varphi(x) + 2\int_0^\infty \frac{\varphi(x+it)-\varphi(x-it)}{2i}\,\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$$

où $\sum\varphi(x)$ désigne »l'intégrale finie» de la fonction $\varphi(x)$, c'est à dire la solution de l'équation fonctionnelle: $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$. Après y être arrivé, ABEL continue en ces termes: »Cette expression de l'intégrale finie d'une fonction quelconque me paraît très remarquable, et je ne crois pas qu'elle ait été trouvée auparavant.» — En fait, l'expression en question avait déjà été trouvée par PLANA en 1820[2].

En 1825 ABEL est revenu sur la formule (1) et en a donné une nouvelle démonstration, dans un Mémoire intitulé: *L'intégrale finie $\sum^n\varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple*[3]. Mais cette démonstration n'indique pas, non plus que la première, les conditions dans lesquelles est applicable la formule dont il s'agit.

Il est assez curieux que le remarquable résultat découvert par PLANA et ABEL ait dû attendre une démonstration rigoureuse jusqu'en 1889, date

---

[1] *Oeuvres complètes d'Abel* (édition SYLOW-LIE), t. I, p. 23.
[2] *Voir ibid.*, t. II, p. 290.
[3] *Ibid.*, t. I, p. 35.

à laquelle a paru le Mémoire de KRONECKER: *Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale* [1], où la formule (1) se trouve enfin rattachée à la théorie des résidus de CAUCHY qui en constitue l'origine naturelle. Plus tard M. J. PETERSEN [2] a fait connaître quelques applications intéressantes de cette même formule.

Dans un Mémoire, intitulé: *Quelques applications d'une formule sommatoire générale,* qui sera inséré dans le tome XXXI des *Acta societatis scientiarum Fennicæ,* nous avons développé quelques applications nouvelles de la formule (1), à laquelle nous avions d'ailleurs été conduit indépendamment des travaux mentionnés ci-dessus. Sur l'invitation de M. MITTAG-LEFFLER, nous indiquerons brièvement ici quelques-uns des résultats auxquels nous sommes arrivés, renvoyant pour les démonstrations et pour les développements ultérieurs au Mémoire cité.

2. Parmi les applications que comporte la formule (1), il y en a une qui nous paraît particulièrement intéressante et qui concerne le prolongement analytique des séries de TAYLOR

$$F(x) = \sum_0^\infty \varphi(n) x^n,$$

où φ est une fonction analytique de son argument.

Posons $x = re^{i\theta}$, $z = \tau + it = \rho e^{i\psi}$, $\varphi(\tau \pm it) = p(\tau, t) \pm iq(\tau, t)$, et admettons relativement à la fonction $\varphi(z)$ les hypothèses suivantes:

1° *$\varphi(z)$ est holomorphe pour toute valeur z telle que $\tau > 0$.*

2° *le nombre positif ε étant donné arbitrairement petit, on peut trouver un autre nombre positif R tel que, pour $-\frac{\pi}{2} < \psi \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho > R$, on ait*

$$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon\rho}.$$

Ces conditions supposées remplies, la fonction $F(x)$ peut se mettre sous la forme

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(0) + H(x) + J(x),$$

[1] *Journal de Crelle*, t. 105, pp. 345—354.

[2] *Vorlesungen über Funktionentheorie* (Copenhague 1898).

où

$$H(x) = -2\int_0^x \{p(0, t)\sin(t\log x) + q(0, t)\cos(t\log x)\}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1},$$

$$J(x) = \int_0^\infty \varphi(\tau)x^\tau d\tau,$$

et de ces expressions on peut tirer successivement les conclusions suivantes:

(*a*) *La fonction $H(x)$ est holomorphe pour* $-2\pi < \theta < 2\pi$, $r > 0$.

(*b*) *La fonction $J(x)$ reste holomorphe dans tout le plan, excepté l'origine, à condition que le point x ne vienne pas traverser le segment* $1 \ldots \infty$ *du rayon d'argument* $\theta = 0$, *ni se confondre avec un point de ce segment.*

(*c*) *La fonction $F(x)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine T, formé du plan entier où l'on aura tracé la coupure* $+1 \ldots +\infty$ *suivant l'axe réel.* Ce résultat avait déjà été établi par M. Le Roy[1], mais par une voie beaucoup moins directe.

(*d*) *La fonction $F(x)$ tend vers zéro lorsque le point x tend vers l'infini avec un argument déterminé, en restant intérieur au domaine T.*

(*e*) *La différence entre une branche quelconque de la fonction $F(x)$ et sa branche principale* (celle dont il est question dans le théorème (*c*)) *peut s'exprimer par la somme d'un nombre fini de termes dont chacun est un multiple entier, positif ou négatif, d'une branche de la fonction $J(x)$. Les singularités de $F(x)$ sont donc toutes comprises parmi celles de $J(x)$.*

Nous allons citer encore un théorème assez général et comportant plusieurs applications intéressantes, dont nous avons développé quelques-unes dans notre Mémoire.

Supposons vérifiées les hypothèses suivantes:

1° $\varphi(z)$ *est holomorphe pour toute valeur z telle que* $\tau \geq 0$;

2° *quelque grand que soit l'angle ψ_0, on peut trouver un nombre positif R tel que $\varphi(z)$ soit holomorphe pour* $-\psi_0 < \psi < \psi_0$, $\rho > R$ (*sauf peut-être à l'infini*);

[1] *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e Série, Tome II, 1900).

3° *quelque grand que soit* ψ_0 *et quelque petit que soit* ε, *on a*

$$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon\rho} \text{ pour } -\psi_0 < \psi < \psi_0,$$

dès que ρ *dépassera une certaine limite.*

Dans ces conditions, on peut affirmer que la fonction $F(x)$ *ne peut admettre d'autres points singuliers que* 0, 1 *et* ∞ *(le point* 0 *étant en général point singulier pour toute branche de* $F(x)$ *autre que la branche principale).*

3. Nous dirons en second lieu quelques mots sur l'application de la formule (1) à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Comme conséquence immédiate, cette formule entraîne l'égalité

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + 2\int_0^\infty (1+t^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} t) \frac{dt}{e^{2\pi t}-1},$$

et par une petite modification, on en déduit

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} - 2\int_0^\infty \left(\frac{1}{4}+t^2\right)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} 2t) \frac{dt}{e^{2\pi t}+1}.$$

Ces expressions définissent la fonction $\zeta(s)$ dans tout le plan et en mettent en évidence plusieurs propriétés intéressantes.

Par une autre modification de la formule (1), on arrive à l'égalité

$$\zeta(s) = 2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \int_0^\infty \frac{t^{-s}dt}{e^{2\pi t}-1},$$

d'où résulte immédiatement le théorème fondamental de Riemann suivant lequel l'expression

$$(2) \qquad \chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

ne change pas de valeur lorsqu'on y substitue $1-s$ à s.

Nous insisterons un peu plus sur l'égalité

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1}$$
$$+ 2n^{-s}\int_0^\infty \left(1+\frac{t^2}{n^2}\right)^{-\frac{s}{2}} \sin\left(s \operatorname{arctg}\frac{t}{n}\right) \frac{dt}{e^{2\pi t}-1},$$

qui se déduit également de la formule (1). En développant le dernier terme suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, on trouve

$$(3)\qquad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_1^k T_\nu + R_k,$$

avec

$$T_\nu = (-1)^{\nu+1} \frac{B_\nu}{2\nu} \frac{s(s+1)\ldots(s+2\nu-2)}{1 \cdot 2 \ldots (2\nu-1)} \cdot \frac{1}{n^{s+2\nu-1}},$$

B_ν désignant, comme d'ordinaire, le $\nu^{\text{ème}}$ nombre de BERNOULLI. On voit que cette dernière expression de $\zeta(s)$ est précisément celle que fournit la formule sommatoire d'EULER, et le reste R_k peut donc se présenter p. ex. sous la forme

$$R_k = -\frac{s(s+1)\ldots(s+2k+1)}{1 \cdot 2 \ldots (2k+2)} \int_n^\infty \frac{P_{2k+2}(\tau)}{\tau^{s+2k+2}} d\tau,$$

$P_{2k+2}(\tau)$ désignant la fonction périodique à la période 1 qui, pour $0 \leq \tau \leq 1$, se confond avec le polynôme de BERNOULLI:

$$P_{2k+2}(\tau) = \tau^{2k+2} - (k+1)\tau^{2k+1} + C^{(2)}_{2k+2} B_1 \tau^{2k} - C^{(4)}_{2k+2} B_2 \tau^{2k-2} + \ldots.$$

En tenant compte des propriétés bien connues de ce polynôme, et en posant $s = x + iy$, on peut tirer de l'expression ci-dessus, pour le module du reste R_k, la limite supérieure suivante:

$$(4)\qquad |R_k| < |s + 2k + 1| \left(\frac{1}{x + 2k + 1} + \frac{1}{2n}\right) |T_{k+1}|.$$

La formule (3) est intéressante sous plusieurs rapports, et surtout parce qu'elle fournit le seul moyen vraiment pratique pour le calcul numérique des valeurs de la fonction $\zeta(s)$. En particulier, on peut s'en servir pour chercher les zéros de $\zeta(s)$ qui sont compris sur la droite D parallèle à l'axe imaginaire et passant par le point $s = \frac{1}{2}$, et à cet effet on peut profiter de la remarque très simple que voici:

Du théorème de RIEMANN, on peut conclure que la fonction $\chi(s)$, définie par l'expression (2), prend des valeurs réelles sur la droite D. Pour

un point quelconque s de cette droite, le reste suivant le module 2π de la quantité

$$\Omega = \arg \pi^{-\frac{s}{2}} + \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \arg \zeta(s)$$

est donc égal à 0 ou à π, suivant que $\chi(s)$ est positif ou négatif. Comme $\chi(s)$ ne change évidemment de signe qu'en s'annulant, et comme cette fonction, d'autre part, présente sur la droite en question précisément les mêmes zéros que $\zeta(s)$, on voit dès lors que, pour séparer les zéros de la fonction $\zeta(s)$ compris sur un segment donné de la droite D, on n'aura qu'à calculer, *avec une erreur moindre que* $\frac{\pi}{2}$, la valeur de la quantité Ω pour une suite de points suffisamment rapprochés de ce segment.

Nous nous permettrons de publier ici les résultats numériques[1] que nous avait fournis un calcul de quelques jours entrepris au commencement de l'année, résultats qui sont certes beaucoup moins précis que ceux qu'a fait connaître dernièrement M. GRAM[2], mais qui suffisent cependant pour illustrer la méthode que nous venons d'esquisser.

Dans le tableau qui suit, $\xi(y)$ et $\eta(y)$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de la quantité $\zeta\left(\frac{1}{2} + iy\right)$, et ω désigne le reste suivant le module 2π (converti en degrés) de la valeur approchée qu'a fournie notre calcul pour la quantité Ω. Les valeurs de $\xi(y)$ et de $\eta(y)$ ont été calculées à l'aide de la formule (3), en y faisant $n = 10$, $k = 1$ et en négligeant le reste.

[1] Nous avions communiqué ces résultats à M. MITTAG-LEFFLER dans une lettre datée du 22 janvier 1902.

[2] *Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann* (présentée à l'Académie des Sciences de Copenhague le 7 février 1902; réimprimée ci-dessus, p. 289).

y	$\xi(y)$	$\eta(y)$	Ω	y	$\xi(y)$	$\eta(y)$	Ω
12	1.016	0.744	180° 1′	32	0.86	−0.20	180°.2
13	0.444	−0.656	180° 3′	34	0.52	1.62	0°.2
14	0.021	−0.104	179° 19′	36	2.35	−1.19	−0°.4
14.25	0.012	0.092	0° 47′	38	0.47	0.56	177°.8
15	0.148	0.706	−0° 1′	40	0.83	−1.03	181°.8
18	2.331	−0.187	0° 2′	42	1.02	0.42	2°.8
20	0.427	−1.062	−0° 7′	44	−0.05	1.37	182°.3
22	0.718	0.665	179° 53′	46	3.29	−1.46	179°.2
24	0.958	−0.585	180° 0′	47	0.24	−1.95	177°.6
26	0.504	1.344	−0° 2′	48	0.07	0.05	(−5°.8)
28	2.713	−0.679	−0° 2′	49	0.65	0.31	−8°.5
30	0.124	−0.598	−0° 3′	50	−0.16	0.42	186°.8

A l'aide de l'inégalité (4), on s'assure facilement que la valeur exacte de la quantité désignée par Ω, pour l'un quelconque des arguments y indiqués dans le tableau (excepté $y = 48$), est bien égale à celle des quantités 0° et 180° qui s'écarte le moins de la valeur calculée de ω. Par suite, les chiffres qui précèdent nous permettent d'énoncer ce résultat que *le segment de la droite D qui correspond à l'intervalle* 12—50 *de l'ordonnée* y, *renferme certainement dix zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *dont les ordonnées sont respectivement comprises entre les limites:*

14—14.25, 20—22, 24—26, 30—32, 32—34,
36—38, 40—42, 42—44, 47—49, 49—50.

Les zéros une fois séparés, on pourra les calculer avec telle approximation qu'on désire, en prenant dans la formule (3) l'entier n suffisamment grand, et en choisissant convenablement l'entier k.

SUR LES PÉRIODES DES INTÉGRALES ABÉLIENNES ET SUR UN NOUVEAU PROBLÈME TRÈS GÉNÉRAL

PAR

EMILE BOREL

À PARIS.

1. Beaucoup de problèmes d'Analyse peuvent être ramenés au problème de la détermination des relations linéaires à coefficients entiers qui peuvent exister entre des nombres transcendants; par exemple entre les périodes de certaines intégrales elliptiques ou abéliennes. C'est ainsi que M. PAINLEVÉ a ramené plusieurs problèmes de la théorie des équations différentielles au suivant: reconnaître si une certaine intégrale abélienne n'a que deux périodes.[1]

Je ne prétends pas indiquer ici une solution à cette difficile question, qui restera sans doute longtemps encore au dessus des moyens de l'analyse; je voudrais seulement chercher à attirer l'attention des géomètres sur quelques réflexions simples qui sont peut être de nature à suggérer une méthode nouvelle pour aborder toute une classe de problèmes comprenant celui-ci comme cas très particulier.

2. Faisons d'abord quelques remarques générales. Il est évidemment nécessaire que les coefficients constants dont dépendent les périodes considérées soient définis d'une manière précise et non pas connus seulement avec quelque approximation. Or, les seuls nombres connus primitivement d'une manière précise sont les nombres entiers; par une infinité de procédés de nature algébrique ou transcendante, on peut, à l'aide des nombres

[1] Voir par exemple ses *Leçons de Stockholm.*

entiers, définir une infinité d'autres nombres, qui seront, eux aussi, connus d'une manière précise.[1] Nous supposerons que l'on a fait un choix entre ces divers procédés, c'est à dire que l'on en a conservé un nombre limité à l'exclusion des autres. De plus, nous supposerons que l'on a choisi un nombre entier N auquel on supposera inférieurs tous les nombres entiers introduits dans les calculs, et tel de plus que le nombre des opérations d'une nature quelconque que l'on suppose effectuées sur ces nombres entiers, soit inférieur à N. Par exemple, si l'on veut introduire un nombre algébrique, les coefficients et le degré de l'équation qui le définit, seront inférieurs à N, etc.

3. Il est clair que l'on définit ainsi un nombre limité de nombres; avec ces nombres choisis comme coefficients, on peut former un nombre limité d'intégrales elliptiques de première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}};$$

et chacune de ces intégrales a seulement deux périodes *principales*, c'est à dire périodes primitives de module minimum.[2] Supposons qu'entre plusieurs de ces périodes convenablement choisies, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$, il y ait des relations linéaires à coefficients entiers de la forme:

$$(1) \qquad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + \ldots + m_q\omega_q = 0.$$

Nous pouvons toujours supposer que, parmi les relations linéaires où figurent effectivement $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ la relation (1) est celle pour laquelle la somme

$$A = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_q^2$$

a la plus petite valeur. Il y aura ainsi au plus autant de valeurs pour A qu'il y a de manières d'associer les périodes q à q, q étant arbitraire.

[1] Par exemple, on peut définir les nombres e et π par les relations

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad 1 = \int_1^e \frac{dx}{x}.$$

Nous donnons ces exemples simplement à titre d'indication.

[2] Voir, par exemple, JORDAN, Cours d'Analyse, 2me édition, tome II, p. 338.

Dès lors il est clair, que *le nombre N étant donné il y a un nombre limité de valeurs pour A;* nous désignerons la plus grande d'entre elles par $\varphi(N)$; on aura ainsi

$$(2) \qquad A \leqq \varphi(N).$$

Si la fonction $\varphi(N)$ était connue, le problème qui consiste à reconnaître s'il peut exister une relation telle que (1) entre des périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ se trouverait décomposé en un nombre *limité* de problèmes plus simples: *reconnaitre si la relation* (1) *est vérifiée, les nombres entiers* $m_1, m_2, \ldots, m_q$ *étant donnés, et les nombres* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ *étant définis par des conditions transcendantes.*

4. Si, en calculant avec approximation le premier membre de la relation (1) on trouve que sa valeur est sûrement différente de zéro, on est certain que la relation (1) n'a pas lieu; il n'y a doute que si l'on trouve une valeur de plus en plus voisine de zéro à mesure que l'on pousse plus loin l'approximation.

Il est bien certain que, si la quantité

$$(3) \qquad m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q$$

est différente de zéro, on s'en apercevra sûrement au bout d'un nombre limité d'opérations; mais ce nombre limité ne peut pas être fixé d'avance.

Voici ce que l'on peut dire à ce sujet; considérons toujours les quantités ω, en nombre limité, que nous avons définies, et choisissons de toutes les manières possibles les entiers positifs ou négatifs m_i, tels que A soit inférieur à $\varphi(N)$; nous définissons ainsi un nombre limité de quantités (3); si nous désignons par $\psi(N)$ le module de la plus petite d'entre elles, en excluant celles qui sont nulles, on aura sûrement

$$|m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q| \geqq \psi(N)$$

dans le cas où la relation (1) n'est pas satisfaite. Donc *la connaissance des deux fonctions* $\varphi(N)$ et $\psi(N)$ *permettrait de résoudre sûrement le problème qui nous occupe, par un nombre limité d'opérations, fixé d'avance.*

5. Je ne suis malheureusement pas en état de proposer une méthode qui permette d'obtenir ces deux fonctions; de sorte que les remarques précédentes substituent simplement à un problème très difficile un autre

problème qui ne paraît pas moins difficile. Mais ce nouveau problème me paraît présenter un très grand intérêt en lui même et avoir une portée très générale; c'est ce que je voudrais indiquer ici très brièvement, en omettant les généralisations pour ainsi dire illimitées que l'on pourrait ajouter aux considérations précédentes.

6. Lorsque l'on définit un nombre entier déterminé au moyen de nombres entiers en nombre fini et d'opérations arithmétiques, il est toujours possible de fixer d'avance une limite supérieure du nombre défini en fonction de ceux qui servent à le définir; on peut exprimer ce fait en disant que la *puissance des opérations arithmétiques est connue et limitée.*

Il en est de même pour certains procédés algébriques de nature bien plus compliquée; par exemple si un nombre entier est défini comme étant le quotient incomplet de rang déterminé du développement en fraction continue d'un nombre algébrique donné, on sait limiter ce nombre au moyen des données; à savoir: les coefficients de l'équation qui définit le nombre algébrique, le degré de cette équation et le rang du quotient incomplet.

Ceci peut être étendu, comme je l'ai montré, au cas on l'on adjoint le nombre e au domaine de rationalité.[1]

Dans ces divers cas, il est d'ailleurs évident que l'on doit toujours s'arranger pour définir un nombre unique ou tout au moins des nombres en nombre limité; peu importe, d'ailleurs, le procédé plus ou moins artificiel par lequel cette limitation est obtenue.

Le principe général sur lequel je voudrais attirer l'attention et qui est évident d'après les considérations précédentes, c'est que les divers procédés transcendants par lesquels on peut définir des nombres entiers ont aussi une *puissance limitée;* c'est ainsi que l'on peut traduire le fait de l'existence de la fonction $\varphi(N)$; il faudrait déterminer cette fonction pour limiter effectivement cette puissance; c'est là le problème que je tenais à signaler à cause de son caractère très général et de l'importance qu'il me paraît avoir au point de vue des principes.

Paris, janvier 1902.

---

[1] Comptes rendus, t. CXXVIII, p. 596 (6 mars 1899).

DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUEMENT[1]

PAR

IVAR BENDIXSON

À STOCKHOLM.

Le but du travail est de montrer que l'on peut parvenir à la détermination des conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux, sans avoir recours à la théorie des substitutions, introduite dans l'Algèbre par GALOIS. On peut en effet déterminer les dites conditions par une extension très facile à effectuer des considérations employées par ABEL dans ses deux Mémoires: *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* et *Sur la résolution algébrique des équations.*

Nous étudierons à cette fin les équations telles que chaque racine puisse s'exprimer en fonction rationnelle de l'une d'entre elles, chaque équation pouvant en effet être réduite à une telle équation. Par une *fonction rationnelle* de x, nous entendons toujours ici une fonction formée par de seules opérations arithmétiques de x et des quantités $R', \dots, R^{\prime}$ définissant le domaine de rationalité donné.

Soit

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

une telle équation, irréductible dans le domaine de rationalité donné. Ses racines peuvent alors s'écrire

$$\begin{array}{llll} x_1 & , \theta x_1 & , \dots, & \theta^{n-1} x_1, \\ \theta_1 x_1 & , \theta\theta_1 x_1 & , \dots, & \theta^{n-1}\theta_1 x_1, \\ \dots & & & \\ \theta_{q-1} x_1, & \theta\theta_{q-1} x_1, & \dots, & \theta^{n-1}\theta_{q-1} x_1, \end{array}$$

[1] Ce mémoire est une reproduction d'un travail publié en suédois dans les Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar; 1891. N° 3, Stockholm, dont un résumé a été publié dans les Annales de la Faculté de Toulouse, Tome 7.

les fonctions θ_ν désignant des fonctions rationnelles de x, et θ satisfaisant en outre à

$$\theta^\nu \theta x_1 = \theta^{\nu+1} x_1, \qquad \theta^n x_1 = x_1. \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

Posons

$$f(x) = (x - x_1)(x - \theta x_1)\ldots(x - \theta^{n-1} x_1).$$

D'après un théorème, démontré par Abel dans le premier des mémoires cités, les coefficients de $f(x)$ peuvent alors s'exprimer en fonctions rationnelles de la quantité

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1)\ldots(t - \theta^{n-1} x_1),$$

t désignant une constante arbitraire, et cette quantité ψ satisfait à une équation de degré q à coefficients rationnels

(2) $$F_1(x') = [x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \theta_1 x_1)]\ldots[x' - \psi(t, \theta_{q-1} x_1)] = 0.$$

L'équation (1) de degré qn est donc réduite à une équation de degré q

(3) $$F_1(x') = 0,$$

qui est irréductible (ce que nous prouverons tout à l'heure), et à une équation abélienne

$$f(x) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de l'équation $F_1 = 0$.

Afin de prouver que l'équation (3) est irréductible, il suffit d'observer que, si

$$[x' - \psi(t, \theta_{\nu_1} x_1)][x' - \psi(t, \theta_{\nu_2} x_1)]\ldots[x' - \psi(t, \theta_{\nu_s} x_1)],$$

où $s < q$, était une fonction rationnelle, on pourrait en conclure que

$$\psi(t, \theta_{\nu_1} x_1)\psi(t, \theta_{\nu_2} x_1)\ldots\psi(t, \theta_{\nu_s} x_1)$$

serait aussi une fonction rationnelle dans le domaine de rationalité donné, et cette dernière fonction est un diviseur de $F(t)$ qui était supposée irréductible.

Si l'on savait maintenant, que l'une des racines de $F_1 = 0$ pouvait s'exprimer en fonction rationnelle d'une autre de ses racines, celles-ci pourraient s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 \;,\; \lambda x'_1 \;,\; \ldots,\; \lambda^{n_1-1} x'_1 \\ x'_2 \;,\; \lambda x'_2 \;,\; \ldots,\; \lambda^{n_1-1} x'_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x'_{q_1} \;,\; \lambda x'_{q_1} \;,\; \ldots,\; \lambda^{n_1-1} x'_{q_1} \end{array}\right\} (q_1 n_1 = q),$$

où λ est une fonction rationnelle telle que l'on ait $\lambda^{n_1} x'_1 = x'_1$. On pourrait alors, de la même manière que nous l'avons fait pour $F = 0$, réduire $F_1 = 0$ à une équation de degré q_1

$$F_2(x'') = 0$$

et une équation abélienne du degré n_1

$$f_1(x') = (x' - x'_1)(x' - \lambda x'_1) \ldots (x' - \lambda^{n_1-1} x'_1) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de F_2.

Dans ce cas il existe donc une fonction rationnelle θ_1 telle que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda \psi(t, x_1),$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \lambda \psi(t, \theta x_1)$$
$$= \psi(t, \theta_1 x_1).$$

Mais t étant une quantité indéterminée les facteurs du membre gauche seront identiques à ceux du membre droit, ce qui fait voir qu'il existe un nombre entier α tel que l'on ait

(4) $$\theta_1 \theta x_1 = \theta^\alpha \theta_1 x_1.$$

De l'autre côté, on voit que, si cette dernière équation a lieu, on en tire

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \psi(t, \theta_1 x_1).$$

Or l'équation (1) étant irréductible on en conclut que

$$\psi(t, \theta_1 \theta^\nu x_1) = \psi(t, \theta_1 \theta^{\nu-1} x_1) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1 \theta^\nu x_1) = \psi(t, \theta_1 x_1). \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

L'équation

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \frac{1}{n}[\psi(t, \theta_1 x_1) + \psi(t, \theta_1 \theta x_1) + \ldots + \psi(t, \theta_1 \theta^{n-1} x_1)],$$

nous prouve alors que $\psi(t, \theta_1 x_1)$ est une fonction symétrique de

$$x_1, \theta x_1, \ldots, \theta^{n-1} x_1,$$

c'est à dire est une fonction rationnelle de $\psi(t, x_1)$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'une des racines de

$$F_1(x') = 0$$

puisse être exprimée en fonction rationnelle d'une autre de ces racines, c'est donc qu'il existe un tel nombre α que l'on ait

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^{\alpha} \theta_1 x_1.$$

Supposons maintenant que l'équation (4) soit satisfaite. On saura donc que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda \psi(t, x_1) \qquad (\text{où } \lambda^{n_1} x_1' = x_1').$$

L'irréductibilité de l'équation (1) nous donnera aussi

$$\psi(t, \theta_1^2 x_1) = \lambda^2 \psi(t, x_1)$$

et en général

$$\psi(t, \theta_1^{\nu} x_1) = \lambda^{\nu} \psi(t, x_1).$$

On en conclut que

$$\psi(t, \theta_1^{n_1} x_1) = \psi(t, x_1)$$

ou que

$$\theta_1^{n_1} x_1 = \theta^k x_1 \qquad k = \text{ nombre entier } < n$$

ce qui est donc encore une conséquence de l'équation (4).

Envisageons maintenant l'équation (2). Si l'équation (4) a lieu, cette équation peut se réduire à une équation abélienne de degré n_1

$$f_1(x') = [x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \theta_1 x_1)] \ldots [x' - \psi(t, \theta_1^{n_1-1} x_1)] = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de

$$\begin{aligned} x_1'' &= (t_1 - x_1')(t_1 - \lambda x_1') \ldots (t_1 - \lambda^{n_1-1} x_1') \\ &= [t_1 - \psi(t, x_1)][t_1 - \psi(t, \theta_1 x_1)] \ldots [t_1 - \psi(t, \theta_1^{n_1-1} x_1)] = \psi_1(t_1, t, x_1), \end{aligned}$$

laquelle expression est elle-même racine d'une équation

$$(5) \qquad F_2(x'') = 0$$

de degré q_1 à coefficients rationnels.

Les autres racines de l'équation (5) seront alors données par les fonctions $\psi_1(t_1, t, \theta_\nu x_1)$.

La condition *nécessaire*, pour qu'une autre racine de l'équation (5) soit une fonction rationnelle $\mu(x_1'')$ de x_1'', est donc qu'il existe une fonction $\theta_2 x_1$ telle que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1) = \mu\psi_1(t_1, t, x_1),$$

ce qui nous donne

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta x_1) = \mu\psi_1(t_1, t, \theta x_1).$$

A l'aide de l'équation (4) on prouve aisément que

$$\psi_1(t_1, t, \theta x_1) = \psi_1(t_1, t, x_1)$$

d'où l'on conclut que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1).$$

Or la quantité t_1 étant complètement indéterminée, il s'en suit que la fonction

$$\psi(t, \theta_2\theta x_1)$$

sera égale à l'une des fonctions

$$\psi(t, \theta_2 x_1), \ \psi(t, \theta_1\theta_2 x_1), \ \ldots, \ \psi(t, \theta_1^{n_1-1}\theta_2 x_1).$$

Soit, pour fixer les idées,

$$\psi(t, \theta_2\theta x_1) = \psi(t, \theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1).$$

Le fait que t est une quantité indéterminée, met alors en évidence que

$$\theta_2\theta x_1$$

sera égal à l'une des quantités

$$\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1, \ \theta\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1, \ \ldots, \ \theta^{n-1}\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1.$$

On en conclut enfin, qu'il existe un nombre α_2 tel que

$$(6) \qquad \theta_2\theta x_1 = \theta^{\alpha_2}\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1.$$

Mais de l'autre côté on aura aussi

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1, t, \theta_2\theta_1 x_1) &= \mu\psi_1(t_1, t, \theta_1 x_1) \\ &= \mu\psi_1(t_1, t, x_1) \\ &= \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1) \end{aligned}$$

et cette équation nous conduit, par des considérations tout analogues à celles développées ci-dessus, à une relation

$$(6') \qquad \theta_2\theta_1 x_1 = \theta^{\alpha'_2}\theta_1^{\beta'_2}\theta_2 x_1.$$

Dans les équations (6) et (6') nous avons donc obtenu les conditions *nécessaires*, pour qu'une racine de l'équation (5) soit une fonction rationnelle de x_1''.

Afin de prouver que ces deux équations constituent en même temps les conditions suffisantes, pour que cela ait lieu, nous envisageons de nouveau la fonction $\psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1)$.

Les équations (6) et (6') conduisent évidemment à

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1, t, \theta_2\theta x_1) &= \psi_1(t_1, t, \theta^{\alpha_2}\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1) \\ &= \psi_1(t_1, t, \theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1) \\ &= \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1). \end{aligned}$$

On en conclut qu'on aura en général

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta^{\nu} x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2\theta^{\nu-1} x_1) \qquad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

ou que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta^{\nu} x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1). \qquad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

En appliquant le théorème déjà cité d'ABEL on sait alors que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1) = R(\psi(t, x_1)),$$

R désignant une fonction rationnelle.

De la même manière on prouve aussi que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta_1 x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1),$$

ce qui nous donne

$$R(\psi(t, \theta_1 x_1)) = R(\psi(t, x_1))$$

et en général

$$R(\psi(t, \theta_1^r x_1) = R(\psi(t, x_1)).$$

On en conclut que la fonction

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1) = \frac{1}{n_1}\left[R(\psi(t, x_1)) + R(\psi(t, \theta_1 x_1)) + \ldots + R(\psi(t, \theta_1^{n_1-1} x_1))\right]$$

est une fonction symétrique de $\psi(t, x_1)$, $\psi(t, \theta_1 x)$, ..., $\psi(t, \theta_1^{n_1-1} x_1)$, c'est à dire une fonction rationnelle de $\psi_1(t_1, t, x_1)$. c. q. f. d.

En continuant ainsi on parvient au théorème que voici:

Etant donnée une équation dont chaque racine peut s'exprimer en fonction rationnelle $\theta_\nu x_1$ de l'une d'entre elles x_1, si entre les fonctions $\theta_\nu x_1$ les relations suivantes ont lieu

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \theta_1 x_1 & = \theta^{\alpha_1} \theta_1 x_1, \\ \theta_2 \theta x_1 & = \theta^{\alpha_2} \theta_1^{\beta_2} \theta_2 x_1, \\ \theta_2 \theta_1 x_1 & = \theta^{\alpha'_2} \theta_1^{\beta'_2} \theta_2 x_1, \\ \cdots & \cdots \\ \theta_\nu \theta x_1 & = \theta^{\alpha_\nu} \theta_1^{\beta_\nu} \ldots \theta_{\nu-1}^{k_\nu} \theta_\nu x_1, \\ \theta_\nu \theta_1 x_1 & = \theta^{\alpha'_\nu} \theta_1^{\beta'_\nu} \ldots \theta_{\nu-1}^{k'_\nu} \theta_\nu x_1, \\ \cdots & \cdots \\ \theta_a \theta_{a-1} x_1 & = \theta^{\alpha_\nu^{\nu-1}} \theta_1^{\beta_\nu^{\nu-1}} \ldots \theta_{\nu-1}^{k_\nu^{\nu-1}} \theta_\nu x_1, \\ \cdots & \cdots, \end{array}\right.$$

l'équation donnée se réduit alors à une suite d'équations abéliennes, et elle est par conséquent résoluble par radicaux

Inversement, si l'équation donnée se réduit à une suite d'équations abéliennes, ses racines sont nécessairement liées entre elles par un système d'équations de la forme (7).

Jusqu'ici nous n'avons employé que les considérations dont s'est servi ABEL dans le premier des Mémoires mentionnés, et l'on voit que l'on trouve par ces considérations seules, la classe la plus générale d'équations qui peuvent se réduire à une suite d'équations abéliennes.

Il nous reste à prouver que l'ensemble des équations (7) forme la condition nécessaire pour que l'équation (1) soit résoluble par radicaux.

Afin d'y parvenir, nous ferons usage des considérations du second Mémoire cité d'ABEL.

Nous avons supposé de l'équation (1) qu'elle soit résoluble algébriquement. Une de ses racines peut alors s'écrire

$$x_1 = \varphi(R', \ldots, R^{\epsilon}, V_1, \ldots, V_q),$$

où $R', \ldots, R^{\epsilon}$ désignent les quantités qui définissent le domaine de rationalité donné, et où les quantités V_ν satisfont aux équations suivantes

$$V_1^{p_1} - \varphi_1(R', \ldots, R^{\epsilon}) = 0,$$
$$V_2^{p_2} - \varphi_2(R'_1, \ldots, R^{\epsilon}, V_1) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_q^{p_q} - \varphi_q(R', \ldots, R^{\epsilon}, V_1, \ldots, V_{q-1}) = 0,$$

les $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$, φ désignant des fonctions rationnelles de $R', \ldots, R^{\epsilon}$, et des fonctions entières rationnelles de $V_1, \ldots, V_q$ de degré $p_1 - 1, \ldots, p_q - 1$. Je suppose ici, que l'on ait adjoint au domaine de rationalité donné les quantités $\omega_1, \ldots, \omega_q$ qui satisfont à

$$\omega_\nu^{p_\nu - 1} + \omega_\nu^{p_\nu - 2} + \ldots + \omega_\nu + 1 = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

que l'équation

$$V_\nu^{p_\nu} - \varphi_\nu(R', \ldots, R^{\epsilon}, V_1, \ldots, V_{\nu-1}) = 0$$

soit irréductible dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^{\epsilon}, V_1, \ldots, V_{\nu-1}$, et que les p_ν soient des nombres premiers.

En mettant $\omega_q V_q$ en φ au lieu de V_q, on obtient une nouvelle racine, ce qui nous donne

$$\varphi(R', \ldots, R^{\epsilon}, V_1, \ldots, V_{q-1}, \omega_q V_q) = \theta\varphi(R', \ldots, R^{\epsilon}, V_1, \ldots, V_{q-1}, V_q),$$

et en général

$$\varphi(R', \ldots, R^{\epsilon}, V_1, \ldots, V_{q-1}, \omega_q^{\nu} V_q) = \theta^{\nu} x_1.$$

Observons que l'on a

$$\theta^{p_q} x_1 = x_1,$$

et formons maintenant

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1), \ldots, (t - \theta^{p_q - 1} x_1) = H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}),$$

où nous supposons pour plus de simplicité, que V_{q-1} soit réellement contenue en H.

En mettant $\omega_{q-1} V_{q-1}$ au lieu de V_{q-1} dans les équations ci-dessus, la fonction V_q se change en $\overline{V}_q$ et l'on obtient une racine

$$x_2 = \varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1} V_{q-1}, \overline{V}_q)$$

de l'équation (1).

On aura alors

$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1} V_{q-1}, \omega_q^\nu \overline{V}_q) = \theta^\nu x_2.$$

Comme

$$\psi(t, x_2) = H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1} V_{q-1})$$

est différent de $\psi(t, x_1)$, il faut que x_2 soit une racine différente de tous les $\theta^\nu x_1$. Écrivons donc

$$x_2 = \theta_1 x_1.$$

En mettant

$$y_\nu = H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1}^{\nu-1} V_{q-1}), \qquad \nu = 1, \ \ldots, p_{q-1}.$$

chaque fonction cyclique de $y_1, \ldots, y_{p_{q-1}}$ est indépendante de V_{q-1}. L'équation

$$(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_{p_{q-1}}) = 0$$

sera donc une équation abélienne dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s$, $V_1, \ldots, V_{q-2}$, ce qui nous permet d'affirmer que

$$y_2 = \bar{\lambda}(y_1, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}), \tag{8}$$

$\bar{\lambda}$ désignant une fonction rationnelle.

Mais l'équation

$$H(x, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}) = 0$$

est évidemment irréductible dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s$, $V_1, \ldots, V_{q-1}$, ce que l'on prouve aisément, en observant que $V_q^{p_q} - \varphi_q$ est

irréductible dans ce domaine, et que p_q est un nombre premier. L'équation (8), qui peut être écrite

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \bar{\lambda}[\psi(t, x_1), R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}],$$

a donc pour conséquence

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \bar{\lambda}[\psi(t, \theta x_1), R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}] = \psi(t, \theta_1 x_1).$$

De cette dernière relation on conclut enfin que l'on a

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^a \theta_1 x_1.$$

Les développements de la page 320 nous permettent alors d'affirmer que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda\psi(t, x_1),$$

λ désignant une fonction rationnelle de $R', \ldots, R^s, t, x_1$. De l'équation

$$y_2 = \lambda(y_1)$$

on conclut en outre que

$$y_3 = \lambda(y_2)$$

et ainsi de suite, de sorte que l'on obtient

$$\lambda^{p_q-1}(y_1) = y_1,$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1^{p_q-1} x_1) = \psi(t, x_1)$$

ou que

$$\theta_1^{p_q-1} x_1 = \theta^k x_1, \qquad k = \text{nombre entier}.$$

Mettons maintenant $\omega_{q-2} V_{q-2}$ au lieu de V_{q-2} dans les expressions de φ et de H. La fonction V_{q-1} se change en $\overline{V}_{q-1}$, x_1 en x_2 et l'équation

$$H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}, \omega_{q-1} V_{q-1}) = \lambda[H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2} V_{q-1})]$$

se change en

$$\begin{aligned} & H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \omega_{q-1} \overline{V}_{q-1}) \\ &= \lambda[H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \overline{V}_{q-1})] \\ &= \lambda\psi(t, x_2) \\ &= \psi(t, \theta_1 x_2). \end{aligned}$$

On aura de la même manière

$$H(t, R', \ldots, R^{s}, V_1, \ldots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \omega_{q-1}^2 \overline{V}_{q-1})$$
$$= [H(t, R', \ldots, R^{s}, V_1, \ldots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \omega_{q-1} \overline{V}_{q-1})]$$
$$= \lambda^2 \psi(t, x_3)$$
$$= \psi(t, \theta_1^2 x_3)$$

et en général

$$H(t, R', \ldots, R^{s}, V_1, \ldots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \omega_{q-1}^{\nu} \overline{V}_{q-1}) = \psi(t, \theta_1^{\nu} x_3).$$

Formons enfin la fonction

$$\psi_1(t_1, t, x_1) = [t_1 - \psi(t, x_1)][t_1 - \psi_1(t, \theta_1 x_1)] \ldots [t_1 - \psi_1(t, \theta_1^{p_{q-1}-1} x_1)]$$
$$= H_1(t_1, t, R', \ldots, R^{s}, V_1, \ldots, V_{q-2})$$

où nous supposerons pour plus de simplicité, que la fonction V_{q-2} soit réellement contenue dans H_1.

On aura alors

$$\psi_1(t_1, t, x_3) = H_1(t_1, t, R', \ldots, R^{s}, V_1, \ldots, \omega_{q-2} V_{q-2}).$$

Les fonctions $\psi_1(t_1, t, x_3)$ et $\psi_1(t_1, t, x_1)$ n'étant alors pas identiques, il s'en suit que x_3 est une racine différente de tous les

$\theta^{\alpha} \theta_1^{\beta} x_1$, α, β désignant des nombres entiers.

Mettons

$$x_3 = \theta_2 x_1$$

et envisageons une fonction cyclique des quantités

$$\psi(t_1, t, \theta_2^{\nu} x_1) = H_1(t_1, t, R', \ldots, R^{s}, V_1, \ldots, \omega_{q-2}^{\nu} V_{q-2}), \quad \nu = 0, 1, \ldots, p_{q-2} - 1,$$

on sait qu'une telle fonction est une fonction rationnelle de $R', \ldots, R^{s}$, $V_1, \ldots, V_{q-3}$, ce qui fait voir que les quantites $\psi(t_1, t, \theta_2^{\nu} x_1)$ sont les racines d'une équation abélienne à coefficients rationnelles en $R', \ldots, R^{s}$, $V_1, \ldots, V_{q-3}$.

On aura donc

$$(9) \qquad \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1) = \mu\big(\psi_1(t_1, t, x_1), R', \ldots, R^{s}, V_1, \ldots, V_{q-3}\big).$$

μ désignant une fonction rationnelle.

Or chaque fonction $H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1}^{\nu} V_{q-1})$ étant irréductible dans le domaine $R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}$, on conclut que la fonction

$$\prod_{\nu=1}^{p_q-1} H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1}^{\nu} V_{q-1}) = H_1(0, t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2})$$

est irréductible dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}$. L'équation (9) est par conséquent satisfaite si l'on y remplace x_1 par l'une quelconque des racines $\theta^{\alpha}\theta_1^{\beta}x_1$.

On aura alors

$$\begin{aligned}\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta x_1) &= \mu(\psi_1(t_1, t, \theta x_1), R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-3}) \\ &= \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1).\end{aligned}$$

D'une manière analogue on obtient

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta_1 x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1).$$

Ces deux équations mettent en évidence que les équations (6) et (6') ont lieu.

Les autres relations (7) se démontrent d'une manière analogue, et l'on peut enfin affirmer qu'elles constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour que $F(x)$ soit résoluble algébriquement.

Ces équations (7) sont évidemment identiques à celles que l'on obtient par la méthode de GALOIS.

SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES BINÔMES

PAR

W. KAPTEYN

À UTRECHT.

En désignant par y une fonction algébrique de la variable x, définie par l'équation algébrique irréductible

$$\varphi(x, y) = 0$$

ABEL a démontré que, si l'intégrale $\int y\,dx$ est elle-même une fonction algébrique de x, elle est exprimable par une fonction entière en y dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x. Dans les pages suivantes nous nous proposons de faire une application de ce théorème remarquable qui compte avec quelques autres théorèmes de l'éminent mathématicien Norwégien, parmi les sources les plus fertiles du calcul intégral.

1. Supposons que l'équation $\varphi(x, y) = 0$ se réduise à la forme

$$y^q = F(x) \tag{1}$$

q étant un nombre entier et $F(x)$ une fonction rationnelle de x; dans ce cas le théorème cité nous apprend que, si l'intégrale $\int y\,dx$ est une fonction algébrique, on aura

$$\int y\,dx = yf(x) + \text{const.} \tag{2}$$

où $f(x)$ représente une fonction rationnelle de x. Évidemment l'équation (2) ne sera pas remplie si l'on choisit pour $F(x)$ la fonction rationnelle

la plus générale. Cherchons donc la forme la plus générale de $F(x)$ qui s'accorde avec la condition (2). Pour y parvenir, différentions les équations (1) et (2) et eliminons $\frac{dy}{dx}$. De cette manière on obtient

$$(3) \qquad \frac{q\left(1-\frac{df(x)}{dx}\right)}{f(x)} = \frac{\frac{dF(x)}{dx}}{F(x)}$$

ou

$$(3') \qquad \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{q}\frac{d}{dx}\lg\left[f(x)^q F(x)\right].$$

Posons, dans cette équation pour $f(x)^q F(x)$ la fonction rationnelle la plus générale

$$f(x)^q F(x) = B(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_l)^{\alpha_l}$$
$$= \prod_{i=1}^{i=l}(x-a_i)^{\alpha_i}$$

où $B, a_1, a_2, \ldots, a_l$ représentent des constantes arbitraires et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ des nombres entiers positifs ou négatifs. En substituant cette valeur dans l'équation (3) celle-ci se réduira à

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{i=l}\frac{\alpha_i}{x-a_i} = \sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}$$

qui fera connaître la forme la plus générale de $f(x)$ s'accordant avec la forme adoptée pour $f(x)^q F(x)$. Cela posé, l'équation (3) donne la forme cherchée de la fonction $F(x)$.

En effet, on aura

$$\frac{d}{dx}\lg F(x) = q\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i} + q\frac{d}{dx}\lg\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}$$

ou, par intégration

$$F(x) = C^q\left(\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}\right)^q\prod_{i=1}^{i=l}(x-a_i)^{qA_i},$$

C^q désignant une constante arbitraire.

De cette discussion il résulte que si y satisfait à une équation de la forme (1) et si la fonction $\int y\,dx$ est algébrique, y doit admettre la forme

$$(4) \qquad y = C\sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x - a_i} \prod_{i=1}^{i=l} (x - a_i)^{A_i}$$

où qA_i représente un nombre entier.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante, car si y admet la forme précédente, on aura

$$(5) \qquad \int y\,dx = C\prod_{i=1}^{i=l} (x - a_i)^{A_i}.$$

2. D'après les considérations précédentes, pour savoir si l'intégrale $\int y\,dx$, où y satisfait à une équation (1), est algébrique, on n'a qu'à examiner si y est réductible à la forme (4) ou non.

C'est ce que nous allons faire pour l'expression binôme

$$(6) \qquad y = (x - \alpha)^m (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)^p$$

en supposant

1° que l'équation

$$(7) \qquad \beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n = 0$$

n'admet que des racines inégales $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2° que α est une constante différente de ces racines;

3° que m et n sont des nombres entiers, dont le dernier est positif;

4° que p est un nombre fractionnaire, dont le dénominateur est le nombre entier q.

D'après ces suppositions on voit que l'expression (6) satisfait à une équation de la forme (1).

Comme les quantités a_i dans la formule (4) sont toutes différentes, supposons qu'ils contiennent les racines de l'équation (7) et encore une série $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_l$ d'autres.

En identifiant maintenant la fonction (6) avec

$$C\left(\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l}\right)$$
$$\times (x - a_1)^{A_1} (x - a_2)^{A_2} \ldots (x - a_n)^{A_n} (x - a_{n+1})^{A_{n+1}} \ldots (x - a_l)^{A_l}$$

il est évident que cette expression doit rester invariable quand on permute les racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de toutes les manières possibles.

Il s'ensuit qu'on doit avoir

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n.$$

Or, parce que

$$\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n = \lambda(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$

on aura

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \ldots + \frac{1}{x - a_n} = \frac{d}{dx}\lg(\beta + \gamma x + \ldots + \gamma x^n);$$

par suite la forme précédente se réduira à

$$\frac{C}{\lambda^{A_1}}\left[A_1\frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)^{A_1}(x - a_{n+1})^{A_{n+1}}\ldots(x - a_l)^{A_l}.$$

Cette forme ne saurait être identique avec la fonction (6) à moins que

$$A_1 = 1 + p.$$

En effet, on voit d'abord que A_1 doit être différent de zéro, parce que dans le cas contraire les deux membres de l'identité supposée ne présenteraient pas les mêmes points critiques. On trouvera donc

$$(x - a)^m = \frac{C}{\lambda^{A_1}}\left[A_1\frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)^{A_1 - p - 1}(x - a_{n+1})^{A_{n+1}}\ldots(x - a_l)^{A_l}.$$

Remarquons ensuite, que le premier membre de cette équation est indépendant de $a_1, a_2, \ldots, a_n$; il faut donc que l'ordre $A_1 - p - 1$ des zéros ou des poles $a_1, a_2, \ldots, a_n$ du second membre soit aussi zéro. En introduisant cette égalité, l'équation précédente s'écrit

$$(x - a)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\left[(1 + p)\cdot\frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)(x - a_{n+1})^{A_{n+1}}\ldots(x - a_l)^{A_l}.$$

Le premier membre étant ici une fonction rationnelle, les quantités $A_{n+1}, \ldots, A_l$ doivent représenter des nombres entiers; et comme le premier membre admet un zéro ou un pôle d'ordre m, selon que m est un nombre positif ou négatif, il faut que le second membre présente le même caractère.

Posons, pour satisfaire à la dernière condition

$$a_{n+1} = \alpha$$

et

$$A_{n+1} \neq 0.$$

Dans cette supposition on aura

$$A_{n+1} - 1 = m.$$

Si, au contraire $A_{n+1} = 0$, le second membre ne saurait admettre le point α comme pôle, tandis qu'un zéro d'ordre m ne serait pas impossible. Il faut donc distinguer deux cas et examiner sous quelles conditions les identités suivantes peuvent exister.

$$\text{(I)} \quad 1 = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\left[(1+p)\frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{1+m}{x-\alpha} + \frac{A_{n+2}}{x - a_{n+2}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)(x-\alpha)(x-a_{n+2})^{A_{n+2}} \ldots (x-a_l)^{A_l}$$

et

$$\text{(II)} \quad (x-\alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\left[(1+p)\frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{A_{n+2}}{x - a_{n+2}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)(x-a_{n+2})^{A_{n+2}} \ldots (x-a_l)^{A_l}$$

m étant un nombre positif dans la dernière de ces équations. Comme les premiers membres de ces équations ne présentent plus de zéros ou de pôles dans les points $a_{n+2}, \ldots, a_l$, il faut que l'ordre des zéros ou des pôles $a_{n+2}, \ldots, a_l$ dans les seconds membres soit aussi zéro.

Par suite

$$A_{n+2} - 1 = \ldots = A_{l-1} = 0.$$

Si donc on pose

$$(x - a_{n+2}) \ldots (x - a_l) = x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i$$

les équations (I) et (II) se réduisent aux suivantes

(8) $$1 = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\Big[(1+p)\frac{\gamma + 2\delta x + .. + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n} + \frac{1+m}{x-\alpha}$$

$$+ \frac{ix^{i-1} + (i-1)A_1x^{i-2} + .. + A_{i-1}}{x^i + A_1x^{i-1} + .. + A_i}\Big]$$

$$\times (\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n)(x-\alpha)(x^i + A_1x^{i-1} + .. + A_i)$$

et

(9) $$(x-\alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\Big[(1+p)\frac{\gamma + 2\delta x + .. + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n}$$

$$+ \frac{ix^{i-1} + (i-1)A_1x^{i-2} + .. + A_i}{x^i + A_1x^{i-1} + .. + A_i}\Big]$$

$$\times (\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n)(x^i + A_1x^{i-1} + .. + A_i).$$

La discussion précédente suppose que le polynôme $x^i + A_1x^{i-1} + .. + A_i$ n'admet que des racines simples $a_{n+2}, .., a_l$ différentes de $a_1, a_2, .., a_n$ et α. Or, l'équation (8) ne saurait être remplie par un polynôme

$$x^i + A_1x^{i-1} + .. + A_i$$

à racines multiples. En effet pour une telle racine ce polynôme et sa dérivée s'évanouissant simultanément, le second membre se réduirait à zéro ce qui serait absurde.

De même ce polynôme ne saurait admettre une racine simple $a_1, a_2, .., a_n$. Quant à l'équation (9) il est également impossible que le polynôme admettrait une racine multiple différente de α, ou les racines simples $a_1, a_2, .., a_n$.

On conclura donc que l'intégrale $\int y\,dx$ étant algébrique, il doit être possible de satisfaire à une des équations (8) ou (9) par un polynôme $x^i + A_1x^{i-1} + .. + A_i$ ne contenant point de racine α.

Réciproquement, si la condition (8) est vérifiée, l'intégrale s'écrit d'après (5)

(10) $$\int y\,dx = \frac{C}{\lambda^{1+p}}(\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n)^{1+p}(x-\alpha)^{1+m}(x^i + A_1x^{i-1} + .. + A_i)$$

et, si la condition (9) est remplie

$$(11)\qquad \int y\,dx = \frac{C}{\lambda^{1+p}}(\beta + \gamma x + \ldots + \gamma x^n)^{1+p}(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i).$$

3. En appliquant la méthode précédente au cas ordinaire

$$y = x^m(a + bx^n)^p$$

on obtiendra aisément les résultats suivants.

L'intégrale $\int y\,dx$ sera seulement algébrique dans les deux cas suivants

1° si

$$\frac{m+1}{n} + p = -1 - r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

et alors

$$\int y\,dx = \frac{x^{1+m}}{(1+m)a}(a + bx^n)^{1+p}\left[\frac{n}{m+1+rn}\cdot\frac{2n}{m+1+(r-1)n}\cdot\frac{rn}{m+1+n}\frac{b^r}{a^r}x^{nr}\right.$$
$$\left. + \frac{2n}{m+1+(x-1)n}\cdot\frac{rn}{m+1+n}\frac{b^{r-1}}{a^{r-1}}x^{n(r-1)} + \ldots + 1\right]$$

2° si

$$\frac{m+1}{n} = 1 + r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

et alors

$$\int y\,dx = \frac{1}{n(1+p+r)b}(a + bx^n)^{1+p}\left[x^{rn} - \frac{r}{p+r}\cdot\frac{a}{b}x^{(r-1)n}\right.$$
$$\left. + \frac{r-1}{p+r-1}\cdot\frac{r}{p+r}\frac{a^2}{b^2}x^{(r-2)n} - \ldots + (-1)^r\frac{1}{p+1}\cdot\frac{2}{p+2}\cdot\frac{r}{p+r}\frac{a^r}{b^r}\right].$$

4. En supposant

$$y = x^m(a + bx^n + cx^{2n})^p$$

on trouvera que l'intégrale est seulement algébrique en trois cas. Les résultats sont ici plus compliqués et se présentent sous les formes suivantes.

1° Si

$$\frac{m+1}{n} + 2p = -2 - r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

et si les $r+1$ équations linéaires à r inconnues

$$ncA_n + (1+p)nb = 0,$$
$$2ncA_{2n} + (2+p)nbA_n - (1+m+rn)a = 0,$$
$$3ncA_{3n} + (3+p)nbA_{2n} - [1+m+(r-1)n]aA_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$rncA_{rn} + (r+p)nbA_{(r-1)n} - (1+m+2n)aA_{(r-2)n} = 0,$$
$$(1+r+p)nbA_{rn} - (1+m+n)aA_{(r-1)n} = 0$$

sont compatibles, on aura

$$\int y\,dx = \frac{1}{(1+m)aA_{rn}}(a+bx^n+cx^{2n})^{1+p}x^{1+m}(x^{rn}+A_nx^{(r-1)n}+\ldots+A_{rn}).$$

2° Si

$$\frac{m+1}{n} = 2+r \qquad (r=1,2,3,\ldots)$$

et si les $r+1$ équations linéaires à r inconnues

$$(2p+r+1)cA_n + (p+r+1)b = 0,$$
$$(2p+r)cA_{2n} + (p+r)bA_n + ra = 0,$$
$$(2p+r-1)cA_{3n} + (p+r-1)bA_{2n} + (r-1)aA_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(2p+2)cA_{rn} + (p+2)bA_{(r-1)n} + 2aA_{(r-2)n} = 0,$$
$$(p+1)bA_{rn} + aA_{(r-1)n} = 0$$

sont compatibles, on aura

$$\int y\,dx = \frac{1}{(2p+r+2)n}(a+bx^n+cx^{2n})^{1+p}(x^{rn}+A_nx^{(r-1)n}+\ldots+A_{rn}).$$

3° Si

$$p = -\frac{2k+1}{2}, \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$
$$m = k_1n - 1, \qquad (k_1=1,2,\ldots,2k)$$
$$r = 2k-1$$

on aura

$$\int y\,dx = \frac{C}{c^{1+p}}(a + bx^n + cx^{2n})^{1+p}(x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \ldots + A_{rn})$$

où les quantités $\frac{C}{c^{1+p}}, A_n, A_{2n}, \ldots, A_{rn}$ satisfont aux $r + 1$ équations linéaires, dont tous les seconds membres à l'exception d'un seul, sont zéro

$$-cA_n + \frac{r}{2}b = 0,$$

$$-2cA_{2n} + \left(\frac{r}{2} - 1\right)bA_n + ra = 0,$$

$$-3cA_{3n} + \left(\frac{x}{2} - 2\right)bA_{2n} + (r-1)aA_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-(r - k_1 + 2)cA_{(r-k_1+2)n} + \left(-\frac{r}{2} + k_1 - 1\right)bA_{(r-k_1+1)n} + k_1 aA_{(r-k_1)n} = \frac{c^{1+p}}{nC},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-rcA_{rn} + \left(\frac{r}{2} - r + 1\right)bA_{(r-1)n} + 2aA_{(r-2)n} = 0,$$

$$-\frac{r}{2}bA_{rn} + aA_{(r-1)n} = 0.$$

Pour plus de détails nous renverrons à notre mémoire sur ce sujet, inséré dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences d'Amsterdam, 2[e] série, t. 17, p. 92.

SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES D'ABEL

PAR

M. LERCH

À FRIBOURG (SUISSE).

Dans les Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin pour l'année 1885 WEIERSTRASS a démontré un théorème auquel on attribue une grande importance, à savoir que toute fonction continue d'une variable réelle peut, pour toutes les valeurs de cette variable contenues dans un intervalle fini, être représentée par une série uniformément convergente dont les termes sont des fonctions entières.

Présenté sous sa forme la plus simple ce théorème n'a apporté rien de nouveau à ceux qui avaient accepté sans critique la méthode d'interpolation pour les fonctions arbitraires. Mais cette dernière méthode n'étant pas établie avec une rigueur suffisante, le théorème de WEIERSTRASS signifie un grand progrès dans la théorie de la représentation analytique des fonctions, malgré la circonstance que sa méthode paraît échapper à la pratique.

Dans deux notes qui ont paru dans les mémoires de l'Académie de Prague[1] j'ai fait usage du théorème de WEIERSTRASS pour établir un théorème fondamental de la théorie des fonctions génératrices d'ABEL, définies par les intégrales de la forme

(1) $$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx,$$

[1] Rozpravy české Akademie, 2e classe, T. I, n° 33 (1892) et T. II, n° 9 (1893).

la fonction (déterminante) $\varphi(x)$ étant supposée indépendante de la quantité a. Dans son mémoire posthume[1] le grand géomètre ne s'est pas borné à cette forme spéciale des fonctions génératrices, mais c'est cependant elle qui avait surtout attiré l'attention des géomètres. Nous verrons qu'à une fonction génératrice donnée ne corresponde pas toujours une fonction déterminante, mais notre attention est consacrée surtout à la question si, lorsque la déterminante existe, elle soit unique. C'est en effet cette question qui paraît la plus importante pour les applications et nous avons démontré, dans les notes citées, que la réponse est affirmative.

Mais l'équation en question

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\varphi_1(x)dx = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi_2(x)dx$$

revenant à la suivante

$$(2^0) \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx = 0$$

où $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, nous sommes amenés à la question quand l'intégrale $J(a)$ s'annule. Nous verrons que si l'équation $J(a) = 0$ est satisfaite par une infinité de valeurs positives de a qui forment une suite arithmétique $a = b + km$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, on aura en général $\varphi(x) = 0$, une exception ne pouvant se présenter que pour des valeurs de x qui constituent un certain ensemble intégrable. C'est de ce théorème général que résulte l'impossibilité de mettre sous la forme (1) les fonctions

$$\sin ka\,,\ \cos ka\,,\ \frac{1}{\Gamma(b - ka)}\,,\ (k > 0)\,,$$

car elles possèdent une infinité de zéros positifs qui forment des séries arithmétiques.

[1] Oeuvres, édition Sylow et Lie, p. 67 et suiv.

I.

Je commence l'exposition des résultats annoncés par une démonstration élémentaire du théorème de WEIERSTRASS. Celle que j'avais adoptée en 1892 consiste en ce qu'on inscrit à la courbe qui représente géométriquement la fonction $y = f(x)$ une ligne brisée polygonale à des arrêtes suffisamment petites et qu'on développe la fonction définie par l'ordonnée de cette ligne polygonale d'après le théorème de FOURIER. Mais le point de vue sous lequel je me place aujourdhui est que le théorème de WEIERSTRASS est d'une nature plus élémentaire que les raisonnements classiques par lesquels LEJEUNE-DIRICHLET avait établi le développement de FOURIER et que, dans un enseignement convenablement arrangé, on peut pour les applications analytiques les plus élégantes substituer au théorème de FOURIER un autre plus particulier et plus facile à établir. L'espace me manque pour en parler davantage et je me borne à indiquer succinctement la démonstration que j'ai en vue.

Au moyen des formules

$$\frac{1}{2} - x = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\mu x\pi}{\mu\pi}, \quad (0 < x < 1),$$

et

$$x^2 - x + \frac{1}{6} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos 2\mu x\pi}{\mu^2\pi^2}, \quad (0 \leq x \leq 1),$$

on vérifie aisément que sous les hypothèses $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ l'expression suivante

$$(3) \quad L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{matrix}\right) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_1 \sin 2\nu\pi(x - x_1) - y_2 \sin 2\nu\pi(x - x_2)}{\nu\pi}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi(x - x_1) - \cos 2\nu\pi(x - x_2)}{\nu^2\pi^2}$$

représente la fonction linéaire

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

lorsque la variable x est intérieure à l'intervalle $(x_1 \dots x_2)$, tandis qu'elle se réduit à zéro pour les points qui lui sont extérieurs en restant intérieurs à l'intervalle $(0 \dots 1)$. La représentation géométrique de la fonction (3) se compose donc du segment de droite $M_1 M_2$ qui joint les points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ et de deux segments de l'axe des abscisses $(0 \dots x_1)$ et $(x_2 \dots 1)$.

Cela étant, soient $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ des quantités réelles qui satisfont aux inégalités

$$0 \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leqq 1,$$

et faisons-leur correspondre des quantités réelles choisies à volonté $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. On aura de la sorte dans le plan $n+1$ points M_a aux coordonnées respectives x_a et y_a $(a = 0, 1, 2, \dots, n)$, lesquels définissent une ligne brisée polygonale $M_0 M_1 M_2 \dots M_n$ que je désigne par L. La somme suivante des quantités telles que (3)

$$y = \sum_{a=0}^{n-1} L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_a x_{a+1} \\ y_a y_{a+1} \end{matrix}\right)$$

est, en général, égale à l'ordonnée du point de la ligne L correspondant à l'abscisse x. Une exception pourra avoir lieu pour les points des intervalles $(0 \dots x_0)$ et $(x_n \dots 1)$ où la quantité y s'annule, et aux sommets $M_0 M_1 \dots M_n$ de la ligne L.

Je désigne par

$$L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_0 x_1 \dots x_n \\ y_0 y_1 \dots y_n \end{matrix}\right)$$

cette quantité y et j'observe que l'on a

$$L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_0 x_1 \dots x_n \\ y_0 y_1 \dots y_n \end{matrix}\right) = \frac{1}{2} \sum_{a=0}^{n-1} (y_a + y_{a+1})(x_{a+1} - x_a)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_0 \sin 2\nu\pi(x - x_0) - y_n \sin 2\nu\pi(x - x_n)}{\nu\pi}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi^2} \sum_{a=0}^{n-1} \frac{y_{a+1} - y_a}{x_{a+1} - x_a} [\cos 2\nu\pi(x - x_{a+1}) - \cos 2\nu\pi(x - x_a)].$$

Ici évidemment le second membre reste continu tant que $x_0 < x < x_n$, d'où il suit que la quantité $L\left(x \begin{vmatrix} x_0 \dots x_n \\ y_0 \dots y_n \end{vmatrix}\right)$ donne l'ordonnée de la ligne L même aux points $M_1 M_2 \dots M_{n-1}$. Sous l'hypothèse $x_0 < x < x_n$ on peut effectuer la sommation de la première série et il vient

$$(4) \qquad L\left(x \begin{vmatrix} x_0 x_1 \dots x_n \\ y_0 y_1 \dots y_n \end{vmatrix}\right) = \left(\frac{1}{2} - x + x_0\right) y_0 + \left(\frac{1}{2} - x_n + x\right) y_n$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{a=0}^{n-1} (y_a + y_{a+1})(x_{a+1} - x_a)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi^2} \sum_{a=0}^{n-1} \frac{y_{a+1} - y_a}{x_{a+1} - x_a} [\cos 2\nu\pi(x - x_{a+1}) - \cos 2\nu\pi(x - x_a)].$$

Je prendrai désormais $x_0 = 0$, $x_n = 1$, de sorte que la ligne L recouvre tout l'intervalle $(0 \dots 1)$ et j'observe que le second membre reste continu dans tout cet intervalle sans exception. Cette expression (4) sera alors partout égale à l'ordonnée de la ligne L.

Ce point établi, la démonstration du théorème de Weierstrass s'achève comme dans ma note de 1892. Soit en effet $f(x)$ une fonction continue, définie dans l'intervalle $(0 \dots 1)$, choisissons sur la ligne qui représente cette fonction un nombre assez grand de points suffisamment approchés $M_1 M_2 \dots M_{n-1}$ et soient $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ leurs abscisses, en supposant $x_1 > 0$, $x_{n-1} < 1$. En prenant encore $x_0 = 0$ et $x_n = 1$ et posant $y_a = f(x_a)$, la quantité (4) formée au moyen de ces valeurs-là sera telle que la différence

$$f(x) - L\left(x \begin{vmatrix} x_0 x_1 \dots x_n \\ y_0 y_1 \dots y_n \end{vmatrix}\right)$$

sera en valeur absolue plus petite qu'une quantité $\frac{\delta}{3}$ donnée d'avance.

Cela étant, arrêtons la série infinie qui figure au second membre de (4) et qui est uniformément convergente, à un nombre fini k de termes, dont on dispose de la sorte que le reste de la série qu'on obtient ainsi soit en valeur absolue plus petit que $\frac{\delta}{3}$; en désignant par $L_k(x)$ la quantité qui résulte de (4) en supprimant le reste en question, on aura donc

$$|L(x) - L_k(x)| < \frac{\delta}{3},$$

et l'inégalité précédente

$$|f(x) - L(x)| < \frac{\delta}{3}$$

permet de conclure

$$|f(x) - L_k(x)| < \frac{2\delta}{3}.$$

La quantité $L_k(x)$ est une expression finie de la forme

$$L_k(x) = \big(f(0) - f(1)\big)\left(\frac{1}{2} - x\right) + A_0 + \sum_{\nu=1}^{k} (A_\nu \cos 2\nu x\pi + B_\nu \sin 2\nu x\pi)$$

et on a par conséquent ce théorème que toute fonction continue dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ peut être représentée, avec l'approximation donnée, par une expression telle que $L_k(x)$. Sans m'arrêter à des applications qui ont quelque importance méthodique je me borne à observer que $L_k(x)$ étant une fonction transcendante entière, on pourra arrêter son développement par la série de Mac Laurin à un certain nombre de termes de la sorte que le reste sera, pour $0 \leq x \leq 1$, plus petit en valeur absolue que $\frac{\delta}{3}$. La fonction $L_k(x)$ sera ainsi remplacée par la fonction rationnelle entière $G(x)$ telle que

$$|L_k(x) - G(x)| < \frac{\delta}{3}$$

et il s'ensuit

$$|f(x) - G(x)| < \delta.$$

Donc, $f(x)$ étant continue dans tout l'intervalle $(0 \ldots 1)$, on pourra prendre, le long de cet intervalle, $G(x)$ comme la valeur approchée de $f(x)$, l'erreur étant dans tout cet intervalle plus petite que δ, c'est à dire qu'une quantité donnée d'avance. C'est le théorème de Weierstrass sous sa forme la plus simple.[1]

[1] Je me réserve de revenir sur le rôle que jouit la fonction $L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_0 \ldots x_n \\ y_0 \ldots y_n \end{matrix}\right)$ dans la théorie de la représentation des fonctions discontinues.

II.

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x, définie dans tout l'intervalle $(0 \ldots \infty)$ et telle que l'intégrale

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx \tag{5}$$

existe pour une certaine valeur $a = c$. Je vérifie d'abord qu'elle existe alors pour toute valeur de a plus grande que c. En effet, $J(a)$ est la limite pour w infini de la quantité

$$J(a, w) = \int_0^w e^{-ax}\varphi(x)dx,$$

et en posant $a = c + a'$, $a' > 0$, puis

$$\psi(x) = \int_0^x e^{-cz}\varphi(z)dz,$$

$\psi(x)$ sera finie et continue et la limite pour x infini est, par hypothèse, une quantité bien déterminée $J(c)$. On en conclut en intégrant par parties l'équation

$$J(a, w) = \psi(w)e^{-a'w} + a'\int_0^w \psi(x)e^{-a'x}dx$$

d'où pour w infini

$$J(a) = (a - c)\int_0^\infty e^{-(a-c)x}\psi(x)dx, \tag{5°}$$

ce qui démontre l'existence de $J(a)$.

Si la fonction $J(a)$ s'évanouit pour une infinité de valeurs positives formant une suite arithmétique $a = b + \mu\alpha$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$, il résulte de (5°) que l'intégrale

$$\int_0^x e^{-a'x}\psi(x)dx$$

s'évanouira pour les valeurs $a' = b - c + \mu a$ également en suite arithmétique et l'on aura

$$\int_0^\infty e^{-\mu a x} e^{-(b-c)x} \psi(x)\, dx = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

équation qui après la substitution $e^{-ax} = z$ prend la forme

$$(6) \qquad \int_0^1 z^{\mu-1} \chi(z)\, dz = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

en posant pour abréger

$$\chi(z) = e^{\frac{b-c}{a} \log z} \psi\left(\frac{1}{a} \log \frac{1}{z}\right).$$

Cette fonction est évidemment finie et continue dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ puisqu'elle est infiniment petite avec z, c'est à dire pour x infini, si l'on suppose, ce qui est permis, que $b > c$.

Cela étant, choisissons une constante δ d'une petitesse arbitraire et formons la fonction rationnelle entière $G(z)$ dont l'existence a été établie plus haut, c'est à dire telle que l'on ait

$$|\chi(z) - G(z)| < \delta;$$

posant

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m,$$

écrivons l'inégalité précédente sous la forme

$$(7) \qquad G(z) = \chi(z) - \vartheta\delta, \; (-1 < \vartheta < 1),$$

où ϑ est évidemment une fonction continue.

Cela étant, on tire de l'équation (6) en y faisant successivement $\mu = 1, 2, \ldots, m + 1$ et ajoutant après avoir multiplié par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, l'équation suivante

$$\int_0^1 \chi(z) G(z)\, dz = 0.$$

Faisant usage de la valeur (7), j'en tire

$$\int_0^1 \chi(z)^2 dz = \delta \int_0^1 \vartheta \chi(z)\, dz$$

d'où enfin

$$\int_0^1 \chi(z)^2 dz < \delta \int_0^1 |\chi(z)| dz.$$

Cette inégalité devient impossible, si $\chi(z)$ n'étant pas identiquement nulle, on prend pour δ une quantité plus petite que le quotient

$$\int_0^1 \chi(z)^2 dz : \int_0^1 |\chi(z)| dz.$$

Il faut donc que l'on ait partout $\chi(z) = 0$, ce qui donne $\psi(x) = 0$, c'est à dire

$$\int_0^x e^{-cz} \varphi(z) dz = 0$$

pour chaque valeur positive de x. Cela exige que l'on ait, tout au plus à l'exception d'un certain ensemble intégrable, partout $\varphi(x) = 0$.

On vient de démontrer le théorème d'importance capitale annoncé plus haut, et qui s'exprime:

»Si l'intégrale définie

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \varphi(x) dx$$

correspondant à une fonction déterminante $\varphi(x)$ intégrable, continue ou discontinue, existe pour une certaine valeur de a, elle existera pour toute valeur plus grande. Elle ne peut pas s'annuler pour une infinité de valeurs positives de a qui forment une suite arithmétique sans que l'on ait identiquement $J(a) = 0$ et, en général, $\varphi(x) = 0$.»

Soit maintenant $f(a)$ une fonction de la variable réelle et positive a, qui à partir d'une certaine limite reste finie pour chaque valeur finie de a sans être identiquement nulle. Alors les produits

$$f(a) \sin ka, \; f(a) \cos ka, \; \frac{f(a)}{\Gamma(b - ka)},$$

formés à l'aide d'une constante positive k, ne pourront pas être mis sous la forme de l'intégrale (5) pour a variable et illimité, car ces fonctions de a possèdent une infinité de zéros formant une suite arithmétique.

Soit maintenant $J(a)$ l'intégrale (5), je dis que si l'équation

$$(a+r)^s J(a) = k$$

peut être satisfaite pour une infinité de valeurs de a formant une suite arithmétique, k, r, s étant des constantes dont la dernière soit positive, on aura nécessairement

$$\varphi(x) = \frac{k}{\Gamma(s)} e^{-rx} x^{s-1}.$$

Car en effet notre équation s'écrit

$$\int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx = \frac{k}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-(a+r)x}x^{s-1}dx$$

et le reste de la démonstration est évident.

Il y a des propositions analogues au sujet des expressions

$$(a^2+b^2)J(a), \qquad \left(a+\frac{b}{a}\right)J(a)$$

et plusieures autres.

III.

Les applications du théorème fondamental qu'on vient d'établir sont nombreuses, mais l'espace manquant, je me borne à une seule. Je veux obtenir la valeur de l'intégrale

$$\Phi(u, \varepsilon) = \int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} + \varepsilon ux\right)\frac{x^{s-1}dx}{1+x^2}$$

pour $\varepsilon = \pm 1$, u étant réel et positif, tandis que s peut être complexe, mais sa partie réelle restant positive et ne dépassant pas deux.

Pour ce but je considère la fonction génératrice

$$J = \int_0^\infty \Phi(u)e^{-au}du$$

qui a pour valeur, comme cela se voit aisément, l'intégrale définie suivante

$$J = \varepsilon \cos\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{(a^2+x^2)(1+x^2)} + a\sin\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{(a^2+x^2)(1+x^2)}.$$

En faisant usage de l'identité

$$\frac{1}{(a^2+x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{a^2-1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{a^2+x^2}\right),$$

puis employant les formules

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{c^2+x^2} = \frac{\pi c^{s-2}}{2\sin\frac{s\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{c^2+x^2} = \frac{\pi c^{s-1}}{2\cos\frac{s\pi}{2}}$$

pour $c = a$ et pour $c = 1$, nous aurons

$$J = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a^2-1}\left[(a+\varepsilon) - (1+\varepsilon)a^{s-1}\right]$$

ou bien

$$J = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a-\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{a^2-1}\,a^{s-1}\right).$$

Dans le cas où $\varepsilon = -1$ on a

$$J = \frac{\pi}{2}\frac{1}{a+1} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-au}e^{-u}\,du,$$

ce qui démontre la formule de Cauchy

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} - ux\right)\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-u}, \quad (u > 0). \tag{8}$$

Le deuxième cas, où $\varepsilon = 1$, donne le résultat un peu plus compliqué

$$J = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a-1} - 2\,\frac{a^{s-1}}{a^2-1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a-1} - \pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2\nu+1-s}}$$

et il s'ensuit la formule que nous avons obtenue dans le second mémoire cité plus haut

$$(9)\qquad \int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} + ux\right)\frac{x^{s-1}dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^u - \pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u^{2\nu-s}}{\Gamma(2\nu+1-s)}.$$

En ajoutant et retranchant avec la formule précédente on obtient

$$2\sin\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\cos ux}{1+x^2}x^{s-1}\,dx = \pi\cos\text{hyp}\,u - \pi S$$

$$2\cos\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\sin ux}{1+x^2}x^{s-1}\,dx = \pi\sin\text{hyp}\,u - \pi S$$

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^{2\nu+2-s}}{\Gamma(2\nu+3-s)}.$$

En prenant les dérivées par rapport à s des deux membres dans les équations précédentes et en posant $s = 1$ ou $s = 2$, on obtient les formules que Schloemilch a données au sujet du logarithme intégral.

En mettant a au lieu de $2 - s$ et faisant pour un moment

$$\varphi(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^\nu}{\Gamma(a+\nu+1)},$$

on aura évidemment

$$S = \frac{1}{2}u^a[\varphi(u) + \varphi(-u)];$$

cela étant, la fonction $\varphi(u)$ peut se transformer au moyen de la formule d'Euler plusieurs fois retrouvée

$$\varphi(u) = \frac{1}{\Gamma(a)}e^u\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu u^\nu}{\underline{|\nu}(a+\nu)}$$

d'où l'on tire

$$S = \frac{1}{2\Gamma(a)}\left[e^u\int_0^u e^{-x}x^{a-1}dx + e^{-u}\int_0^u e^x x^{a-1}dx\right].$$

Changeant donc s en $s + 1$ nos formules deviendront

$$(10) \quad \begin{cases} 2\cos\frac{s\pi}{2}\int\limits_0^\infty \frac{x^s \cos ux}{1 + x^2}\,dx = \pi \cos \operatorname{hyp} u \\ \qquad\qquad - \frac{\pi}{2\Gamma(1-s)}\left[e^u \int\limits_0^u e^{-x}x^{-s}dx + e^{-u}\int\limits_0^u e^x x^{-s} dx\right], \\ 2\sin\frac{s\pi}{2}\int\limits_0^\infty \frac{x^s \sin ux}{1 + x^2}\,dx = -\pi \sin \operatorname{hyp} u \\ \qquad\qquad + \frac{\pi}{2\Gamma(1-s)}\left[e^u \int\limits_0^u e^{-x}x^{-s}dx + e^{-u}\int\limits_0^u e^x x^{-s} dx\right]. \end{cases}$$

SUR LA MÉTHODE D'ABEL POUR L'INVERSION DE LA PREMIÈRE INTÉGRALE ELLIPTIQUE, DANS LE CAS OÙ LE MODULE A UNE VALEUR IMAGINAIRE COMPLEXE

PAR

P. MANSION

À GAND.

1. *Objet de cette Note.* La méthode d'ABEL pour opérer l'inversion de la première intégrale elliptique de LEGENDRE et établir les propriétés fondamentales de la fonction inverse est, croyons-nous, l'une des plus simples et des plus naturelles qui aient été proposées dans ce but.

En général, ABEL n'a considéré dans ses Mémoires que des intégrales ou des fonctions elliptiques de module réel. Mais il a fait remarquer que les résultats auxquels il arrive s'appliquent le plus souvent au cas où le module est imaginaire. »Ce théorème, dit-il, en parlant de la double périodicité, a lieu généralement quelles que soient les quantités e et c, réelles ou imaginaires. Je l'ai démontré pour le cas où e^2 est négatif et c^2 positif dans le mémoire précédent. Les quantités ω, ω' sont toujours dans un rapport imaginaire» (*Oeuvres,* tome I, première édition, p. 254; 2e édition, p. 404—405). Ailleurs »Les formules présentées dans ce qui précède ont lieu, avec quelques restrictions, le module c étant quelconque, réel ou imaginaire» (*Ibid.,* première édition, p. 335; 2e édition, p. 528).[1]

[1] Les derniers éditeurs d'ABEL disent à ce propos: »Nous avons cherché en vain, dans les manuscrits d'ABEL une indication de la méthode dont il comptait se servir pour étendre ses résultats aux modules imaginaires» (*Oeuvres,* t. II, p. 319).

Nous nous proposons de montrer, dans cette Note [1], que l'on peut étendre, d'une manière naturelle, la méthode d'exposition des principes de la théorie des fonctions elliptiques d'ABEL au cas où le module est une quantité imaginaire complexe. Pour abréger, nous supposerons le module k^2 de la forme $\rho e^{\alpha i}$, ρ étant positif et α compris entre o et π. Si α était compris entre π et 2π, le module complémentaire $k'^2 = 1 - k^2$ serait de la forme $\rho' e^{\alpha' i}$, ρ' étant positif et α' compris entre o et π. On peut donc faire, par rapport à k'^2, tous les raisonnements que nous allons faire par rapport à k^2, dans les intégrales dont il est question dans les n°s 2 et 3. On trouve, en effet, en posant $t_2 = [s^2 : (1 + s^2)]$,

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + k'^2 s^2}},$$

et, de même, en faisant $s^2 = \frac{t^2}{1 - t^2}$,

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + k^2 s^2}} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k'^2 t^2}}.$$

Nous n'employons, dans les démonstrations qui suivent, que des principes tous connus d'ABEL et démontrés dans le *Cours d'analyse* de CAUCHY (1821) ou, pour le théorème du n° 6, V, dans le ***Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*** (Paris, De Bure, 1825), du même géomètre.

2. **Théorème I.** *La courbe représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation*

$$x + yi = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}},$$

[1] Nous avons donné une esquisse du présent travail (n° 2 et 3, premiers alinéas et les remarques du n° 4) dans les *Annales de la société scientifique de Bruxelles,* 1898, t. XXI, 1ère partie, pp. 90—91, mais sans prouver que sn, cn, dn sont des fonctions bien déterminées. — Dans le même recueil, 1900, t. XXIII, 1ère partie, pp. 55—57, nous avons traité le cas où k^2 est réel, mais non compris entre o et 1. — Nous avons annoncé les résultats établis ici dans les thèses 16, 17 et 18 annexées à notre dissertation inaugurale: *Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques* (Paris, Gauthier-Villars, 1870).

où $k^2 = \rho e^{\alpha i}$, ρ *étant positif,* α *compris entre* o *et* π, t *variant de* o *à l'unité en restant réel et les radicaux ayant l'unité pour valeur initiale, est comprise dans l'angle* $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ *compté à partir de l'axe des* x *et n'a aucun point double.*

L'argument de k^2 et, par suite, celui de k^2t^2 étant α, celui de $-k^2t^2$ sera $-\pi + \alpha$; celui de $1 - k^2t^2$ sera compris entre o et $-\pi + \alpha$. L'argument de $\sqrt{1 - k^2t^2}$ sera compris entre o et $-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$, ou entre ces mêmes quantitées augmentées de π; mais on devra choisir la première valeur, car pour t tendant vers zéro, l'argument de $\sqrt{1 - k^2t^2}$ doit tendre vers l'argument de 1; or, dans la seconde hypothèse, l'argument de $\sqrt{1 - k^2t^2}$ tendrait vers π, c'est-à-dire vers l'argument de -1. L'argument de $\sqrt{1 - k^2t^2}$ étant compris entre o et $-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$, celui de $(1 : \sqrt{1 - k^2t^2})$ est compris entre o et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$.

L'intégrale $x + yi$ est la limite de la somme d'expressions $(1 : \sqrt{1 - k^2t^2})$, multipliées par des quantités positives $(dt : \sqrt{1 - t^2})$; l'argument de cette somme et, par suite, de l'intégrale est donc aussi compris entre o et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$. La courbe est donc comprise toute entière dans l'angle $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ compté à partir de l'axe des x.

Posons $x + yi = re^{\beta i}$, r étant positif. Je dis que β et r croissent en même temps que t. En effet, la valeur absolue de l'argument de $1 - k^2t^2$ croît de o à $\pi - \alpha$ quand t varie de o à ∞, comme on le voit en construisant le parallélogramme ayant pour côtés 1 et $-k^2t^2$; la valeur absolue de l'argument de $\sqrt{1 - k^2t^2}$ ou la valeur de l'argument de $(1 : \sqrt{1 - k^2t^2})$ croît de o à $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$, quand t varie de o à ∞. L'argument de la somme des éléments de l'intégrale et, par suite, celui de l'intégrale elle-même croît donc avec t.

La valeur de r va aussi en croissant avec t, parce que le module de la somme de deux ou plusieurs quantités complexes dont les arguments diffèrent de moins de $\frac{1}{2}\pi$ est supérieure au module de chacune d'elles. A mesure que l'on considère un plus grand nombre d'éléments de l'intégrale, le module de leur somme et, par suite, celui de l'intégrale augmente.

Soit

$$\sqrt{1-k^2t^2} = m + ni \quad \text{ou} \quad 1 - \rho t^2 \cos\alpha - i\rho t^2 \sin\alpha = m^2 - n^2 + 2mni,$$

d'où il résulte que

$$2mn = -\rho t^2 \sin\alpha, \qquad -\frac{m}{n} = \frac{\rho t^2 \sin\alpha}{2n^2}.$$

On aura

$$x + yi = \int_0^t \frac{m - ni}{1 - t^2(m^2+n^2)}\,dt, \qquad \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = \frac{m - ni}{\sqrt{1 - t^2(m^2+n^2)}},$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{m}{n} = \frac{\rho t^2 \sin\alpha}{2n^2} > 0.$$

Donc x croît en même que $y = r\sin\beta$, quand t croît de 0 à 1.

La courbe $x + yi = re^{\beta i}$ est donc telle que x, y, r, β croissent avec t et cette courbe n'a aucun point double quand t varie de zéro à l'unité.

3. **Théorème II.** *La courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x' + y'i = i\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}},$$

où $k^2 = \rho e^{\alpha i}$, *ρ étant positif, α compris entre* 0 *et* π, *s variant de* 0 *à* $+\infty$ *en restant réel et les radicaux ayant l'unité pour valeur initiale, est comprise dans l'angle $\frac{1}{2}\alpha$ compté à partir de l'axe des y, dans l'angle des x et des y positifs, et n'a aucun point double.*

L'argument de k^2 et, par suite, celui de k^2s^2 étant α, celui de $1 + k^2s^2$ est compris entre 0 et α; celui de $\sqrt{1+k^2s^2}$ est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\alpha$, ou entre ces quantités augmentées de π; mais on doit choisir la première valeur, parce que, pour s tendant vers zéro, l'argument de $\sqrt{1+k^2s^2}$ doit tendre vers l'argument de 1; or, dans la seconde hypothèse, l'argument de ce radical tendrait vers π, c'est-à-dire vers l'argument de -1. L'argument de $\sqrt{1+k^2s^2}$ étant compris entre 0 et $\frac{1}{2}\alpha$, celui de $(1:\sqrt{1+k^2s^2})$ est compris entre 0 et $-\frac{1}{2}\alpha$ et celui de $(i:\sqrt{1+k^2s^2})$ entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$.

L'intégrale $x' + y'i$ est la limite de la somme d'expressions $(i : \sqrt{1 + k^2 s^2})$ multipliées par des quantités positives $(ds : \sqrt{1 + s^2})$; l'argument de la somme et, par suite, celui de l'intégrale sera donc aussi compris entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$. La courbe est donc comprise toute entière dans l'angle $\frac{1}{2}\alpha$ compté à partir de l'axe des y.

Posons $x' + y'i = r'e^{\beta' i}$, r' étant positif. Je dis que β' décroît et que r' croît quand s croît. En effet, l'argument de $1 + k^2 s^2$ croît de 0 à α, celui de $\sqrt{1 + k^2 s^2}$ de 0 à $\frac{1}{2}\alpha$ quand s varie de 0 à ∞, comme on le voit en construisant le parallélogramme ayant pour côtés 1 et $k^2 s^2$; la valeur de l'argument de $(i : \sqrt{1 + k^2 s^2})$ décroît donc de $\frac{1}{2}\pi$ à $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ dans les mêmes circonstances. Il en résulte immédiatement que l'argument de la somme des éléments de l'intégrale et, par suite, celui de l'intégrale elle-même décroît quand s croît.

La valeur de r' va en croissant avec s, parce que le module de la somme de deux ou plusieurs quantités complexes dont les arguments diffèrent de moins de $\frac{1}{2}\pi$ est supérieur au module de chacune d'elles. A mesure que l'on considère un plus grand nombre d'éléments de l'intégrale, le module de leur somme et, par suite, celui de l'intégrale augmente.

Soit

$$\sqrt{1 + k^2 s^2} = m' + n'i \quad \text{ou} \quad 1 + \rho s^2 \cos\alpha + i\rho s^2 \sin\alpha = m'^2 - n'^2 + 2m'n'i,$$

d'où il résulte que

$$2m'n' = \rho s^2 \sin\alpha, \qquad \frac{m'}{n'} = \frac{\rho s^2 \sin\alpha}{2n'^2}.$$

On aura

$$x' + y'i = i\int_0^s \frac{m' - n'i}{\sqrt{1 + s^2(m'^2 + n'^2)}}\,ds, \qquad \frac{dx'}{ds} + i\frac{dy'}{ds} = \frac{m'i + n'}{\sqrt{1 + s^2(m'^2 + n'^2)}},$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{m'}{n'} = \frac{\rho s^2 \sin\alpha}{2n'^2} > 0.$$

Donc y' croît en même temps que $x' = r'\cos\beta'$ quand s croît de 0 à ∞.

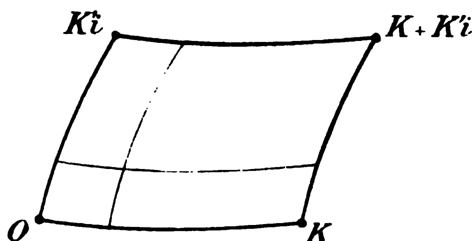
La courbe $x' + y'i = r'e^{\beta' i}$ est donc telle que $x', y', r', -\beta'$ croissent avec s et cette courbe n'a aucun point double quand s varie de 0 à l'infini.

4. **Théorème III.** *Si l'on fait glisser parallèlement à elle-même la première courbe* (x, y) *de manière que son point initial* $(0, 0)$ *décrive la seconde* (x', y'), *ou, inversement, la seconde* (x', y') *de manière que son point initial* $(0, 0)$ *décrive la première* (x, y), *chacune des deux courbes, dans son mouvement, balayera la surface d'un parallélogramme curviligne, en ne passant qu'une seule fois par chacun de ses points.*

Posons

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}}, \qquad K'i = i\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + k^2 s^2}}.$$

D'après la définition du parallélogramme curviligne, ses points s'obtiennent en faisant varier t de 0 à 1, s de 0 à ∞, de manière que $x + yi$



varie de 0 à K, $x' + y'i$ de 0 à $K'i$, x, y, x', y' allant d'ailleurs sans cesse en croissant, comme on l'a vu dans les théorèmes I et II. Un point quelconque de ce parallélogramme sera donc représenté par $x + yi + x' + y'i$.

Je dis qu'il est impossible que le même point soit représenté par une expression de même forme $X + Yi + X' + Y'i$, $X + Yi$ étant un point de la première courbe correspondant à une valeur T de la limite supérieure de la première intégrale, $X' + Y'i$ étant un point de la seconde courbe correspondant à une valeur S de la limite supérieure de la seconde intégrale.

En effet, l'égalité

$$x + yi + x' + y'i = X + Yi + X' + Y'i,$$

ou

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}} + i\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + k^2 s^2}} = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}} + i\int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + k^2 s^2}},$$

peut s'écrire

$$\int_t^T \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = i\int_S^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}}.$$

Or cette dernière égalité est impossible; car, on a vu, dans l'étude des deux courbes, que, à π près, l'argument de la première intégrale est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$, celui de la seconde multipliée par i, entre $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ et $\frac{1}{2}\pi$.

Remarques. I. Il n'est pas sans intérêt d'observer que si l'on pose

$$K = Re^{Bi}, \qquad K'i = R'e^{B'i},$$

on a

$$\frac{1}{2}\pi > B' > \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha > B > 0$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}\pi > B' - B > 0.$$

Il en résulte que

$$\frac{K'i}{K} = \frac{R'}{R}e^{(B'-B)i} = \frac{R'}{R}\cos(B'-B) + i\frac{R'}{R}\sin(B'-B).$$

Le coefficient de i, dans la valeur de $(K'i:K)$, est donc positif.

II. Dans le cas où α est compris entre π et 2π, et, par suite, α' entre 0 et π, on trouve aisément que l'on a

$$0 > B > -\frac{1}{2}\alpha', \qquad \frac{1}{2}\pi < B' < \pi - \frac{1}{2}\alpha', \qquad \frac{1}{2}\pi < B' - B < \pi$$

et le coefficient de i est encore positif.

5. *Inversion.* I. Posons, dans l'intégrale du n° 2, $t = \sin\varphi$, $z = x + yi$. Nous aurons

$$z = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Si nous écrivons, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à 1,

$$\varphi = \operatorname{am} z, \; t = \sin\varphi = \sin\operatorname{am} z = \operatorname{sn} z, \; \sqrt{1 - t^2} = \cos\varphi = \cos\operatorname{am} z = \operatorname{cn} z,$$

$$\sqrt{1 - k^2 t^2} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \Delta\varphi = \Delta \operatorname{am} z = \operatorname{dn} z,$$

les fonctions $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ seront des fonctions bien déterminées de z, puisque la courbe (x, y) n'a pas de point double, et cela, pour toutes les valeurs de φ, de 0 à $\frac{1}{2}\pi$.

Mais rien n'empêche de faire croître φ indéfiniment ou de lui donner des valeurs négatives, le radical $\sqrt{1 - t^2}$ de l'intégrale primitive ayant toujours le signe de $\cos\varphi$. La variable z prendra des valeurs bien déterminées de 0 à K d'abord, puis de K à $2K$, de $2K$ à $3K$, etc. et de même de 0 à $-nK$, n étant aussi grand qu'on le veut; la courbe (x, y) correspondante s'étendra jusqu'à l'infini dans les deux sens, sans avoir de point double.

Nous tirons immédiatement de là, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à l'unité, les propriétés fondamentales de sn, cn, dn, *quand* sn *est réel*, mais non le théorème de l'addition:

(1) $$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \qquad k^2 \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z = 1;$$

(2) $$D \operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z, \quad D \operatorname{cn} z = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad D \operatorname{dn} z = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z;$$

(3) $$\operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z, \qquad \operatorname{cn}(-z) = \operatorname{cn} z, \qquad \operatorname{dn}(-z) = \operatorname{dn} z;$$

(4) $$\operatorname{sn} 0 = 0, \qquad \operatorname{cn} 0 = 1, \qquad \operatorname{dn} 0 = 1;$$

(5) $$\operatorname{sn} K = 1, \qquad \operatorname{cn} K = 0, \qquad \operatorname{dn} K = k';$$

(7) $$\operatorname{sn}(z + 2K) = -\operatorname{sn} z, \quad \operatorname{cn}(z + 2K) = -\operatorname{cn} z, \quad \operatorname{dn}(z + 2K) = \operatorname{dn} z.$$

II. Si l'on fait $t = si$, dans la première intégrale, elle se transforme dans la seconde, considérée au n° 3, savoir:

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}} = i \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + k^2 s^2}}.$$

Dans celle-ci on peut faire varier sans inconvénient s de 0 à ∞.

Posons

$$z'i = x' + y'i, \qquad s^2 = \frac{u^2}{1 - u^2}, \qquad u = \sin\psi,$$

il viendra

$$z'i = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + k^2 s^2}} = i\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - k'^2 u^2}} = i\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi}}.$$

On a immédiatement, d'après 5, I, en mettant le module k' en évidence,

$$\sin\psi = \mathrm{sn}(z', k'), \qquad \cos\psi = \mathrm{cn}(z', k'), \qquad \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi} = \mathrm{dn}(z', k).$$

On a aussi

(8) $$t = si = i \operatorname{tang}\psi, \qquad \sqrt{1 - t^2} = \sqrt{1 + s^2} = \frac{1}{\cos\psi},$$
$$\sqrt{1 - k^2 t^2} = \sqrt{1 + k^2 s^2} = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi}}{\cos\psi}$$

les signes des expressions en ψ étant déterminées par la valeur initiale des radicaux. Si l'on pose

$$t = \mathrm{sn}(z'i, k), \qquad \sqrt{1 - t^2} = \mathrm{cn}(z'i, k), \qquad \sqrt{1 - k^2 t^2} = \mathrm{dn}(z'i, k),$$

les fonctions $\mathrm{sn}(z'i, k)$, $\mathrm{cn}(z'i, k)$, $\mathrm{dn}(z'i, k)$ seront des fonctions bien déterminées de $z'i$, puisque la courbe (x', y') n'a pas de point double, pour toutes les valeurs de s de 0 à ∞, ou de φ de 0 à $\frac{1}{2}\pi$.

Les relations (8) donneront d'ailleurs, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à l'unité, les formules de la transformation imaginaire d'Abel et de Jacobi:

(9) $$\mathrm{sn}(z'i, k) = i\frac{\mathrm{sn}(x', k')}{\mathrm{cn}(x', k')}, \qquad \mathrm{cn}(z'i, k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(x', k')},$$
$$\mathrm{dn}(z'i, k) = \frac{\mathrm{dn}(x', k')}{\mathrm{cn}(x', k')}.$$

Rien n'empêche de faire croitre ψ indéfiniment ou de lui donner des valeurs négatives, les radicaux $\sqrt{1 - t^2}$, $\sqrt{1 - k^2 t^2}$ ayant toujours le signe de $\cos\psi$. La variable $z'i$ prendra des valeurs bien déterminées de 0 à $K'i$ d'abord, de $K'i$ à $2K'i$, de $2K'i$ à $3K'i$, etc., et, de même, de zéro à $-nK'i$,

n étant aussi grand qu'on le veut; la courbe correspondante (x', y') s'étendra de o à ∞, dans les deux sens, sans avoir de point double.

Nous tirons sans peine de ce qui précède, *pour la variable $z'i$*, les propriétés fondamentales exprimées par les équations (1), (2), (3) et, de plus, les suivantes:

$$(10) \qquad \operatorname{sn} K'i = i\,.\,\infty, \qquad \operatorname{cn} K'i = \infty, \qquad \operatorname{dn} K'i = k\,.\,\infty;$$

$$(11) \qquad \operatorname{sn}(z'i + 2K'i) = \operatorname{sn} z'i, \qquad \operatorname{cn}(z'i + 2K'i) = -\operatorname{cn} z'i,$$
$$\operatorname{dn}(z'i + 2K'i) = -\operatorname{dn} z'i.$$

Dans ces formules, $\operatorname{sn} z'i$ *est purement imaginaire.*

III. Soit $\xi = z + z'i$, z étant une valeur quelconque considérée au n° 5, I, $z'i$ une valeur quelconque considérée au n° 5, II. Par définition, nous poserons (comme Abel l'a fait dans le cas où k^2 est positif et inférieur à l'unité),

$$(12) \qquad \operatorname{sn}\xi = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z'i \operatorname{dn} z'i + \operatorname{sn} z'i \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 z'i},$$

$$\operatorname{cn}\xi = \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} z'i - \operatorname{sn} z \operatorname{sn} z'i \operatorname{dn} z \operatorname{dn} z'i}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 z'i},$$

$$\operatorname{dn}\xi = \frac{\operatorname{dn} z \operatorname{dn} z'i - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn} z'i \operatorname{cn} z \operatorname{cn} z'i}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 z'i}.$$

On déduit de là, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à 1, *pour la variable générale ξ*, les propriétés (1), (2), (3), (7), (11), (9); de plus, les suivantes:

$$(13) \qquad \operatorname{sn}(K + K'i) = \frac{1}{k}, \qquad \operatorname{cn}(K + K'i) = -i\frac{k'}{k}, \qquad \operatorname{dn}(K + K'i) = 0.$$

$$(14) \qquad \operatorname{sn}(\xi + 2K + 2K'i) = -\operatorname{sn}\xi, \qquad \operatorname{cn}(\xi + 2K + 2K'i) = \operatorname{cn}\xi,$$
$$\operatorname{dn}(\xi + 2K + 2K'i) = -\operatorname{dn}\xi,$$

et beaucoup d'autres, en particulier, celles-ci:

$$(15) \qquad \operatorname{sn}(K'i - u) = -\frac{1}{k \operatorname{sn} u}, \qquad \operatorname{cn}(K + K'i - u) = -i\frac{k'}{k}\frac{1}{\operatorname{cn} u},$$
$$\operatorname{dn}(K - u) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}.$$

La variable ξ considérée ici est quelconque. D'après sa définition même, on peut la mettre sous la forme $2pK + 2p'K'i \pm \xi_1$, p et p' étant des nombres entiers positifs ou négatifs; $\xi_1 = z_1 + z'_1 i$ correspond à un point du parallélogramme curviligne du n° 4, dont les coordonnées sont $x_1 + x'_1$, $y_1 + y'_1$, si $z_1 = x_1 + y_1 i$ représente un point de la première courbe, $z'_1 = x'_1 + y'_1 i$ un point de la seconde. Puisque ξ_1 ne peut être égal à une somme de la forme $z_1 + z'_1 i$ que d'une manière (n° 4), les fonctions $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$ sont bien déterminées.

6. *Infinis, zéros, périodes de* sn, cn, dn; *théorème de l'addition*; sn *peut prendre toute valeur.*

I. Des formules (1) et (12), il résulte (comme Abel l'a montré, quand k^2 est positif et inférieur à l'unité), que $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$ ne sont infinis que si $\operatorname{sn} z = 0$, $\operatorname{sn} z'i = \infty$, ce qui donne $2pK + (2p' + 1)K'i$ pour les infinis de ces fonctions, p et p' étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

II. D'après les formules (15), pour que $\operatorname{sn}(K'i - u)$, $\operatorname{cn}(K + K'i - u)$, $\operatorname{dn}(K - u)$ s'annulent, il faut et il suffit que $u = 2pK + (2p' + 1)K'i$. Cette remarque donne immédiatement les zéros des fonctions $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$.

III. Ces fonctions, par suite, ne peuvent avoir pour périodes que $2K$, $2K'i$ ou leurs multiples; car si elles en avaient d'autres, elles auraient d'autres zéros et d'autres infinis que ceux que nous venons de déterminer.

IV. Le théorème de l'addition peut s'établir, dans le cas actuel, comme l'a fait Abel, quand k^2 est positif et inférieur à l'unité. Mais il peut aussi être démontré algébriquement comme il suit: Quand k^2 est positif et inférieur à l'unité, on a identiquement, si $S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$,

$$\operatorname{sn} S = \frac{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\gamma+\delta)\operatorname{dn}(\gamma+\delta) + \operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha+\beta)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(\alpha+\beta)\operatorname{sn}^2(\gamma+\delta)}$$
$$= \frac{\operatorname{sn}(\alpha+\gamma)\operatorname{cn}(\beta+\delta)\operatorname{dn}(\beta+\delta) + \operatorname{sn}(\beta+\delta)\operatorname{cn}(\alpha+\gamma)\operatorname{dn}(\alpha+\gamma)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(\alpha+\gamma)\operatorname{sn}^2(\beta+\delta)}$$

et de même pour $\operatorname{cn} S$, $\operatorname{dn} S$, pourvu que l'on exprime les deux fractions au moyen des fonctions sn, cn, dn de α, β, γ et δ. Les mêmes identités algébriques subsistent si k^2 est imaginaire complexe, quand α et β sont des expressions de la forme z considérées au n° 5, I, γ et δ des expressions de la forme $z'i$ considérée au n° 5, II. Ces identités expriment évidemment alors le théorème de l'addition pour $\operatorname{sn}(\xi_1 + \xi_2)$, $\operatorname{cn}(\xi_1 + \xi_2)$, $\operatorname{dn}(\xi_1 + \xi_2)$, si $\xi_1 = \alpha + \gamma$, $\xi_2 = \beta + \delta$.

V. Enfin, la fonction $\operatorname{sn}\xi$ peut prendre une valeur quelconque $\lambda+\mu i$. En effet, posons

$$I = \int_0^{\lambda+\mu i} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

l'intégrale étant prise le long d'une courbe continue qui ne passe par aucun des points $+1$, -1, $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$. On pourra représenter chacune des valeurs de l'intégrale par une expression ξ de la forme $z+z'i$, z variant de 0 à $Z = 2pK \pm Z_1$, $z'i$ de 0 à $2p'K'i \pm Z'_1 i$, p et p' étant des entiers positifs ou négatifs, Z_1 correspondant à un point de la courbe du n° 2, $Z'_1 i$ à un point de la courbe du n° 3. — On a identiquement, en posant $\operatorname{sn}\xi = t$,

$$I = \int_0^I d\xi = \int_0^I \frac{d\operatorname{sn}\xi}{\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi} = \int_0^{\operatorname{sn} I} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}.$$

Les deux intégrales en t, l'une de 0 à $\lambda+\mu i$, l'autre de 0 à $\operatorname{sn} I$, sont égales quelque rapproché que l'on suppose $\lambda+\mu i$ de 0; autrement dit, l'intégrale de l'expression en t, le long d'un chemin convenable, de $\lambda+\mu i$ à $\operatorname{sn} I$ est nulle quelque rapproché que $\lambda+\mu i$ soit de 0. Cela suppose que l'on ait $\lambda+\mu i = \operatorname{sn}\xi$, dans le voisinage de zéro, puis partout, de proche en proche, comme il est aisé de le voir.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR

IVAR FREDHOLM

À STOCKHOLM.

Dans quelques travaux[1] ABEL s'est occupé avec le problème de déterminer une fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

(a) $$\int f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x)$$

$f(x,y)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions données. ABEL a résolu quelques cas particuliers de cette équation fonctionnelle dont il paraît avoir reconnu le premier l'importance. C'est pour cela que je propose d'appeler l'équation fonctionnelle (a) une *équation fonctionnelle abélienne.*

Dans cette note je ne m'occupe pas en premier lieu de l'équation abélienne mais de l'équation fonctionnelle

(b) $$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x),$$

qui est étroitement liée à l'équation abélienne.

En effet, si on introduit au lieu de $f(x,y)$ et $\psi(x)$, $\frac{1}{\lambda}f(x,y)$ et $\frac{1}{\lambda}\psi(x)$, l'équation (b) s'écrit

(c) $$\lambda\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x),$$

équation qui se transforme en l'équation (a) en posant $\lambda = 0$. Ainsi la solution de l'équation (a) peut être considérée comme implicitement contenue dans la solution de l'équation (b).

[1] Magazin for Naturvidenskaberne, Kristiania 1823 et Oeuvres complètes.

Quant à l'équation (b) elle me paraît mériter l'attention particulière des géomètres, car la plupart des problèmes de la Physique mathématique qui conduisent à des équations différentielles linéaires se traduisent par des équations fonctionnelles de la forme (b) ou de la forme

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) + \int \ldots \int f(x_1 \ldots x_n, \xi_1 \ldots \xi_n) \varphi(\xi_1 \ldots \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n = \psi(x_1 \ldots x_n).$$

Pour le voir on n'a qu'à rappeler le problème de DIRICHLET dans le cas où l'on cherche à représenter le potentiel inconnu par le potentiel de double couche, des problèmes analogues de la théorie du magnétisme et de la théorie de l'élasticité.

Le premier essai de résoudre une équation (b) a été fait par NEUMANN. En effet, la méthode célèbre de NEUMANN pour la résolution du problème de DIRICHLET consiste en le développement de $\varphi(x)$ suivant les puissances croissantes du paramètre $\frac{1}{\lambda}$. Mais le développement de NEUMANN, tout en convergeant dans le cas du problème de DIRICHLET, ne peut pas converger dans le cas général.

Dans un travail important[1] la méthode de NEUMANN a été appliquée avec succès par M. VOLTERRA à l'équation fonctionnelle

$$\text{(c)} \qquad \varphi(x) + \int_0^x f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x).$$

Dans le même travail M. VOLTERRA a aussi mis en évidence le rapport intime entre l'équation (c) et l'équation abélienne

$$\int_0^x f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x).$$

L'équation que je me propose à étudier dans le présent travail comprend comme cas particulier l'équation de M. VOLTERRA, car en supposant, dans l'équation (b), que $f(x, y)$ soit nul pour $y > x$, on obtient immédiatement l'équation (c).

Dans ce qui suit la fonction $f(x, y)$ sera soumise à quelques restrictions. Je suppose que $f(x, y)$ soit telle que, α étant inférieur à l'unité, $(x - y)^\alpha f(x, y)$ soit une fonction finie et intégrable. Ainsi je ne vais

[1] Annali di Matematica, 1896.

pas traiter l'équation (b) dans toute sa généralité. Mais les restrictions que j'ai imposées à la fonction sont justifiées par les applications de l'équation (b) à la Physique mathématique auxquelles je me réserve de revenir dans un autre travail.

---

§ 1. *Sur la formation et les propriétés du déterminant de l'équaton fonctionnelle fondamentale.*

1. Supposons que $f(x, y)$ soit une fonction finie et intégrable soit par rapport à une seule ou par rapport aux deux variables réelles x et y qui, pour fixer les idées, seront supposées positives et moindres que l'unité.

Dans ce cas il existe une quantité D_f qui joue par rapport à l'équation fonctionnelle (b) le même rôle que joue le déterminant par rapport à un système d'équation linéaires.

Pour définir D_f j'introduis la notation abrégée

$$(1) \qquad f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \ldots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \ldots & f(x_2, y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \ldots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

et je pose

$$(2) \qquad D_f = 1 + \int_0^1 f(x, x)dx + \frac{1}{\underline{|2}} \int_0^1 \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|n}} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

2. Pour démontrer la légitimité de cette expression nous n'avons que rappeler un théorème de M. HADAMARD.[1]

Le dit théorème nous apprend que la valeur absolue d'un déterminant donné est au plus égale à la racine carrée du terme principal dans le dé-

---

[1] Bulletin des sciences mathématiques, 1893, p. 242.

terminant obtenu en multipliant le déterminant donné avec son déterminant imaginaire conjugué.

Par conséquent, si F est la limite supérieure de $f(x, y)$ on a

$$\left|f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix}\right| \leqq \sqrt{n^n} F^n.$$

Ainsi la série D_f converge comme la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{\underline{|n}} F^n.$$

3. Il n'est pas sans intérêt de noter que la convergence s'améliore si on suppose chez $f(x, y)$ une certaine espèce de continuité.

En effet, supposons qu'il existe une limite supérieure A des valeurs du quotient

$$\frac{f(x, y) - f(x, z)}{(y - z)^a}.$$

Alors on peut évidemment écrire

$$\left|f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix}\right| \leqq \sqrt{n^n} A^n (x_1 - x_2)^a (x_2 - x_3)^a \ldots (x_{n-1} - x_n)^a.$$

Or, le premier membre étant une fonction symétrique des variables $x_1 \ldots x_n$ il suffit évidemment pour en trouver le maximum de considérer celles qui remplissent les conditions

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n.$$

Dans ce cas la valeur maxima du produit

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \ldots (x_{n-1} - x_n)$$

est égale à

$$\frac{1}{n^n}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\underline{|n}} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n < \frac{(n^n)^{\frac{1}{2} - a}}{\underline{|n}} A^n.$$

4. De la même manière que nous avons démontré la légitimité de l'expression de D_f on démontre celle des expressions suivantes que j'appelle les mineurs de D_f.

Je pose

$$(3)\qquad D_f\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} + \int_0^1 f\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_n, x\\ \eta_1 \ldots \eta_n, x\end{pmatrix} dx$$

$$+ \frac{1}{\lfloor 2} \int_0^1 \int_0^1 f\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_n, x_1, x_2\\ \eta_1 \ldots \eta_n, x_1, x_2\end{pmatrix} dx_1 dx_2 + \ldots$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor \nu} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu.$$

5. Les mineurs satisfont à des relations importantes que nous allons déduire maintenant.

Développant le déterminant

$$f\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix}$$

suivant les éléments de la première ligne on trouve

$$f\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix}$$

$$= f(\xi_1, \eta_1) f\begin{pmatrix}\xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_2 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix} - f(\xi_1, \eta_2) f\begin{pmatrix}\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1, \eta_3 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix} + \ldots$$

$$- (-1)^n f(\xi_1, \eta_n) f\begin{pmatrix}\xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1 \ldots \eta_{n-1}, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^n f(\xi_1, x_1) f\begin{pmatrix}\xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1 \ldots \eta_{n-1}, \eta_n \ldots x_\nu\end{pmatrix} - \ldots$$

$$- (-1)^{n+\nu} f(\xi_1, x_\nu) f\begin{pmatrix}\xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1 \ldots \eta_{n-1}, \eta_n \ldots x_{\nu-1}\end{pmatrix}.$$

Multiplions les deux membres de cette identité par $dx_1 \ldots dx_\nu$ et intégrons entre les limites 0 et 1, nous aurons la formule

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu$$

$$= f(\xi, \eta_1) \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_2 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu$$

$$- f(\xi_1, \eta_2) \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1, \eta_3 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu + \ldots$$

$$- \nu \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\xi_1, \tau) f\begin{pmatrix} \tau, \xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_{\nu-1} \\ \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_{\nu-1} \end{pmatrix} d\tau dx_1 \ldots dx_{\nu-1}.$$

Multipliant ensuite par $\frac{1}{\underline{|\nu}}$ et faisant la somme depuis $\nu = 0$ jusqu'à $\nu = \infty$ on arrive à la formule très-importante

$$(4) \qquad D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f(\xi_1, \tau) D_f\begin{pmatrix} \tau, \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} d\tau$$

$$= f(\xi_1, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} - f(\xi_1, \eta_2) D_f\begin{pmatrix} \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_n \\ \eta_1, \eta_3 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \ldots.$$

En commençant par développer le déterminant suivant les éléments de la première colonne on trouve de la même manière la formule

$$(5) \qquad D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f(\tau, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n \\ \tau, \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} d\tau$$

$$= f(\xi_1, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} - f(\xi_2, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_3 \ldots \xi_n \\ \eta_2, \eta_3 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \ldots \text{ etc.}$$

Dans le cas $n = 1$ ces deux formules deviennent

$$(4_1) \qquad D_f\binom{\xi}{\eta} + \int_0^1 f(\xi, \tau) D_f\binom{\tau}{\eta} d\tau = f(\xi, \eta) D_f,$$

$$(5_1) \qquad D_f\binom{\xi}{\eta} + \int_0^1 f(\tau, \eta) D_f\binom{\xi}{\tau} d\tau = f(\xi, \eta) D_f.$$

6. Introduisant dans D_f au lieu de $f(x, y)$, $\lambda f(x, y)$ nous trouvons que $D_{\lambda f}$ peut se développer suivant les puissances croissantes de λ dans une série qui, à cause du lemme de M. HADAMARD, converge pour toute valeur de λ. Ainsi $D_{\lambda f}$ est une fonction entière de λ.

En se rappelant les définitions de D_f et de ses mineurs on trouve immédiatement les relations

$$(6) \qquad \lambda^n \cdot \frac{d^n D_{\lambda f}}{d\lambda^n} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

qui subsistent pour $n = 1, 2, 3$, etc.

Ces relations nous permettent de parvenir à un résultat important. En effet, $D_{\lambda f}$ étant une fonction entière de λ chaque racine de l'équation

$$D_{\lambda f} = 0$$

a nécessairement une multiplicité finie.

Par conséquent, on ne peut pas trouver de valeur de λ pour laquelle $D_{\lambda f}$ et toutes ses dérivées soient nulles.

En particulier si, pour $\lambda = 1$, $D_{\lambda f} = D_f = 0$, on peut toujours trouver un premier mineur de D_f qui n'est pas identiquement nul.

§ 2. *Sur une classe de transformations fonctionnelles et leur inversion.*

7. Considérons maintenant une équation fonctionnelle

(7) $$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, s)\varphi(s)ds = \psi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $\psi(x)$ une fonction finie et intégrable.

En considérant l'équation (7) comme transformant la fonction $\varphi(x)$ en une nouvelle fonction $\psi(x)$ j'écris cette même équation

(7) $$S_f\varphi(x) = \psi(x),$$

et je dis que la transformation S_f appartient à la fonction $f(x, y)$.

Les transformations (7) *forment une groupe.* En effet, considérons une autre transformation S_g appartenant à la fonction $g(x, y)$ qui remplit les mêmes conditions d'intégrabilité etc. que $f(x, y)$.

Alors on trouve facilement qu'on peut poser

$$S_g\psi(x) = S_g S_f\varphi(x) = S_F\varphi(x)$$

où

$$F(x, y) = g(x, y) + f(x, y) + \int_0^1 g(x, t)f(t, y)dt.$$

Quant à l'inversion de l'équation (7) deux cas sont possibles: D_f est différent de zéro ou $D_f = 0$.

8. Supposons d'abord que le déterminant D_f soit différent de zéro et posons

$$g(x, y) = -\frac{D_f\binom{x}{y}}{D_f}.$$

Alors on trouve à cause de l'équation (5_1) que F est identiquement nulle. Par conséquent, l'équation identique

$$S_g S_f\psi(x) = \psi(x)$$

ayant lieu, S_g est la transformation inverse de S_f. Ainsi, s'il existe une solution de l'équation (7) elle est unique et donnée par l'équation

$$\varphi(x) = S_g \psi(x).$$

D'autre côté, introduisons dans l'équation (7) au lieu de $\varphi(x)$ $S_g\psi(x)$ nous obtenons

$$S_f \varphi(x) = S_f S_g \psi(x) = S_F \psi(x)$$

où F, à cause de l'équation (4_1) est encore égale à zéro.

Par conséquent, nous pouvons énoncer le théorème:

Si le déterminant D_f d'une équation fonctionnelle de la forme

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, s)\varphi(s)ds = \psi(x),$$

où $f(x, s)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions finies et intégrables, est différent de zéro, il existe une et une seule fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à cette équation.

Cette fonction est donnée par l'équation:

$$\varphi(x) = \psi(x) - \int_0^1 \frac{D_f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_f} \psi(y)dy.$$

9. Considérons maintenant le cas où D_f est nul.

Nous avons vu, dans ce cas, qu'il existe un premier mineur de D_f qui n'est pas identiquement nul.

Soit

$$D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix}$$

ce mineur. Parce que les mineurs d'ordre inférieur sont nuls, la formule (4) s'écrit

$$D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f(\xi_1, \tau) D_f\begin{pmatrix} \tau, \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1, \eta_2 \dots \eta_n \end{pmatrix} d\tau = 0.$$

C'est à dire

$$\varphi(x) = D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix}$$

est une solution de l'équation homogène

$$(7') \qquad \varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y)dy = 0.$$

Pour en trouver toutes les solutions, désignons par S_f la transformation appartenant à f et soit φ une solution de l'équation

$$S_f\varphi(x) = 0.$$

Apellons S_g la transformation *pseudo-inverse* de S_f, si

$$g(x, y) = -\frac{D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_1 \ldots \xi_n \\ y, & \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix}}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix}},$$

les paramètres ξ, η étant choisis de manière que le dénominateur soit différent de zéro, ce qui, par hypothèse, est toujours possible.

Alors

$$S_g S_f\varphi(x) = S_F\varphi(x) = 0,$$

où

$$F(x, y) = f(x, y) + g(x, y) + \int_0^1 g(x, \tau)f(\tau, y)d\tau.$$

Or à cause de l'équation (5) on a

$$(9) \qquad F(x, y)$$

$$= \frac{1}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix}}\left[f(\xi_1, y)D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} - f(\xi_2, y)D_f\begin{pmatrix} \xi_1, & x, & \xi_3 \ldots \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \ldots \eta_n \end{pmatrix} - \ldots - (-1)^n f(\xi_n, y)D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots x \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix}\right]$$

ou bien, en employant une notation abrégée

$$(10) \qquad F(x, y) = -\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu, y)\Phi_\nu(x).$$

Or, $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$S_F\varphi(x) = 0,$$

par conséquent on a

$$(11) \qquad \varphi(x) = -\int_0^1 F(x, y)\varphi(y)dy = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu(x)\int_0^1 f(\xi_\nu, y)\varphi(y)dy$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \Phi_\nu(x).$$

On vérifie immédiatement que cette expression satisfait à l'équation

$$S_f\varphi(x) = 0$$

quelles que soient les coefficients A_ν.

Les n fonctions $\Phi_1 \ldots \Phi_n$ sont linéairement indépendantes, car la formule (4) nous apprend que

$$\int_0^1 f(\xi_\lambda, x)\Phi_\mu(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad \lambda = \mu. \end{cases}$$

Cela posé, l'hypothèse qu'il existe une relation linéaire entre les fonctions Φ_ν soit

$$a_1\Phi_1 + \ldots + a_n\Phi_n = 0,$$

conduit à la contradiction

$$\int_0^1 \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f(\xi_\nu, x) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x)dx = \Sigma a_\nu^2 = 0.$$

Ainsi, non seulement les fonctions Φ_ν mais encore les fonctions $f(\xi_\nu, x)$ sont linéairement indépendantes.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution différente de zéro de l'équation

$$S_f\varphi(x) = 0$$

c'est que $D_f = 0$. Si n est l'ordre du premier mineur de D_f qui soit différent de zéro, l'équation donnée possède n solutions linéairement indépendantes.

Cherchons maintenant les conditions de l'existence d'une solution de l'équation

$$S_f\varphi(x) = \psi(x)$$

dans l'hypothèse que $D_f = 0$ et les mineurs d'ordre inférieur à n soient nuls.

D'abord il faut démontrer une formule. Parce que la fonction

$$\alpha(x) = D_f\begin{pmatrix} x\,, & a_2 \ldots a_n \\ b_1\,, & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix}$$

satisfait à l'équation

$$S_f\alpha(x) = 0,$$

$\alpha(x)$ est une fonction linéaire des fonctions $\Phi_\nu(x)$. En se rappelant que $\alpha(x)$ satisfait aussi à l'équation

$$S_F\alpha(x) = 0$$

où bien à l'équation

$$\alpha(x) = -\int_0^1 F(x, y)\alpha(y)dy$$

on obtient immédiatement pour $\alpha(x)$ l'expression

(12)
$$\alpha(x) = -\sum_{\nu=1}^{n}\alpha(\xi_\nu)\,\Phi_\nu(x).$$

Procédant d'une manière analogue avec la fonction

$$\beta(x) = D_f\begin{pmatrix} a_1\,, & a_2 \ldots a_n \\ x\,, & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix}$$

on parvient à l'expression

(13)
$$\beta(x) = -\sum_{\nu=1}^{n}\beta(\eta_\nu)\,\Psi_\nu(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\Psi_1(x) = -\frac{D_f\begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2 \ldots \xi_n \\ x\,, & \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix}}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix}}$$

et ainsi de suite. On voit que ces n fonctions Ψ sont linéairement indépendantes.

Revenons maintenant à l'équation proposée et intégrons-la après l'avoir multipliée par

$$D_f\begin{pmatrix} a_1\,, & a_2 \dots a_n \\ x\,, & b_2 \dots b_n \end{pmatrix} dx$$

nous trouvons

$$\int_0^1 \varphi(x) D_f\begin{pmatrix} a_1\,, & a_2 \dots a_n \\ x\,, & b_2 \dots b_n \end{pmatrix} dx + \int_0^1\int_0^1 \varphi(y) f(x\,, y) D_f\begin{pmatrix} a_1\,, & a_2 \dots a_n \\ x\,, & b_2 \dots b_n \end{pmatrix} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \psi(x) D_f\begin{pmatrix} a_1\,, & a_2 \dots a_n \\ x\,, & b_2 \dots b_n \end{pmatrix} dx.$$

Or, à cause de l'équation (4) on trouve que le premier membre est nul quelle que soit la fonction $\varphi(x)$.

Par conséquent $\psi(x)$ doit satisfaire à l'équation

$$\int_0^1 \psi(x) D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \dots a_n \\ x\,, & b_1 \dots b_n \end{pmatrix} dx = 0 \tag{15}$$

quels que soient les paramètres a et b. Le nombre de conditions paraît être infini, mais à cause de l'équation (13) le nombre se réduit à n à savoir les n équations

$$\int_0^1 \psi(x)\, \Psi_\nu(x) dx = 0. \qquad {\scriptstyle (\nu = 1 \dots n)} \tag{15'}$$

Supposons ces conditions vérifiées et cherchons s'il existe, dans ce cas, une solution de l'équation (7).

Appliquons pour ce but la transformation S_g aux deux membres de l'équation (7) nous aurons

$$S_g S_f \varphi(x) = S_F \varphi(x) = S_g \psi(x).$$

Or,

$$S_F \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu\, \Phi_\nu(x).$$

Ainsi

$$\varphi(x) = S_g\psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \Phi_\nu(x).$$

Cherchons maintenant si la valeur trouvée satisfait à l'équation (7). Pour cela il suffit de voir si $\varphi(x) = S_g\psi(x)$ satisfait à l'équation (7) car l'autre terme est une solution de l'équation homogène et peut être rejété. On a

$$S_f\varphi(x) = S_f S_g \psi(x) = S_G \psi(x)$$

où à cause de l'équation (4) et de la définition des fonctions Ψ_ν on a

$$G(x, y) = -\sum_{\nu=1}^{n} f(x, \eta_\nu)\Psi_\nu(y).$$

Par conséquent on trouve à cause de l'équation (15)

$$\int_0^1 G(x, y)\psi(y)dy = 0$$

et par suite

$$S_G\psi(x) = \psi(x)$$

et

$$S_f\varphi(x) = \psi(x).$$

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$S_f\varphi(x) = \psi(x)$$

ait une solution s'expriment par les n équations (15).

10. Le système d'équations

(16) $$\varphi_\lambda(x) + \int_0^1 \sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(x, y)\varphi_\nu(y)dy = \psi_\lambda(x) \qquad (\lambda = 1 \ldots n)$$

peut être ramené à une seule équation du type précédent.

Pour le montrer, définissons une fonction $F(x, y)$ pour des valeurs entre o et n par les n^2 conditions

$$F(x, y) = f_{\lambda\nu}(x - \lambda + 1, y - \nu + 1), \quad \text{pour} \quad 0 < \begin{matrix} x - \lambda + 1 \\ y - \nu + 1 \end{matrix} < 1$$

et une fonction Ψ par les n conditions

$$\Psi(x) = \psi_\lambda(x - \lambda + 1), \text{ pour } 0 < x - \lambda + 1 < 1.$$

Si alors le déterminant de l'équation

$$(17) \qquad \Phi(x) + \int_0^n F(x, y)\Phi(y)dy = \Psi(x)$$

est différent de zéro on en obtient une solution $\Phi(x)$ et une seule. Définissant ensuite les fonctions $\varphi_\lambda(x)$ par les conditions

$$\Phi(x) = \varphi_\lambda(x - \lambda + 1), \text{ pour } 0 < x - \lambda + 1 < 1$$

on voit que ces fonctions satisfont au système proposé.

On voit aussi que c'est la seule solution qui puisse satisfaire au système donné car autrement il en résulterait une autre fonction $\Phi(x)$ satisfaisant à l'équation (17), ce qui n'est pas possible.

§ 3. *Sur la première variation du déterminant D_f.*

11. Calculons d'abord la première variation de

$$f\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_1 \dots x_n \end{pmatrix}.$$

Si nous désignons par la notation

$$x_1, x_2 \dots (x_\lambda) \dots x_n$$

la suite des valeurs $x_1, x_2 \dots x_n$ à l'exception de x_λ, nous pouvons écrire

$$\delta f\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_1 \dots x_n \end{pmatrix} = \sum_{\lambda\mu} (-1)^{\lambda+\mu} f\begin{pmatrix} x_1 \dots (x_\lambda) \dots x_n \\ x_1 \dots (x_\mu) \dots x_n \end{pmatrix} \delta f(x_\lambda, x_\mu).$$

Multiplions les deux membres par $dx_1 \ldots dx_n$ et intégrons entre les limites o et 1. En observant que la notation des variables est indifférente nous aurons évidemment

$$\delta \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n$$

$$= n \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2 \ldots x_{n-1} \\ x_1, x_2 \ldots x_{n-1} \end{pmatrix} \delta f(x, x)\, dx\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$- n(n-1) \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} y, x_1 \ldots x_{n-2} \\ x, x_1 \ldots x_{n-2} \end{pmatrix} \delta f(x, y)\, dx\, dy\, dx_1 \ldots dx_{n-2}.$$

Multipliant par $\frac{1}{|\underline{n}}$ et faisant la somme depuis $n = 1$ jusqu'à ∞ nous obtenons

$$\delta D_f = \int_0^1 D_f \delta f(x, x) dx - \int_0^1 \int_0^1 D_f\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \delta f(x, y)\, dx\, dy$$

ou

$$\delta \log D_f = \int_0^1 \delta f(x, x) dx - \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_f\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}}{D_f} \delta f(x, y)\, dx\, dy.$$

On a évidemment

$$\delta f(x, y) - \int_0^1 \frac{D_f\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}}{D_f} \delta f(t, y)\, dt = S_f^{-1} \delta f(x, y).$$

Par conséquent on peut aussi écrire

$$(18) \qquad \delta \log D_f = \int_0^1 [S_f^{-1} \delta f(x, y)]_{x=y}\, dx.$$

En introduisant pour la transformation

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(y, x)\varphi(y)dy$$

la notation

$$T_f$$

on obtient une autre expression de la variation logarithmique de D_f à savoir

(18 bis) $$\delta \log D_f = \int_0^1 [T_f^{-1} \delta f(x, y)]_{x=y} dx.$$

§ 4. *Le théorème de multiplication.*

12. Pour arriver au théorème de multiplication considérons deux transformations

$$S_f\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y)dy,$$

$$S_g\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 g(x, y)\varphi(y)dy.$$

Posons le produit de ces deux transformations

$$S_f S_g = S_F$$

nous aurons

$$F(x, y) = f(x, y) + g(x, y) + \int_0^1 f(x, t)g(t, y)dt.$$

Considérant de même les transformations

$$T_f\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(y, x)\varphi(y)dy,$$

$$T_g\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 g(y, x)\varphi(y)dy$$

nous aurons

$$T_g T_f = S_G$$

où

$$G(x, y) = f(y, x) + g(y, x) + \int_0^1 f(y, t)g(t, x)dt = F(y, x).$$

Nous avons trouvé

$$\delta \log D_F = \int_0^1 \delta F(x, x)dx - \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_F\binom{y}{x}}{D_F} \delta F(x, y)dxdy$$

formule qui peut s'écrire aussi (18)

(19) $$\delta \log D_F = \int_0^1 [(S_f S_g)^{-1} \delta F(x, y)]_{x=y} dx$$

ou encore

(20) $$\delta \log D_F = \int_0^1 [(T_g T_f)^{-1} \delta F(x, y)]_{x=y} dx.$$

Or

$$\delta F(x, y) = \delta f(x, y) + \delta g(x, y) + \int_0^1 [f(x, t)\delta g(t, y) + g(t, y)\delta f(x, t)]dt$$

$$= T_g \delta f(x, y) + S_f \delta g(x, y),$$

par conséquent en introduisant cette expression dans (19) et (20) on trouve

$$\delta \log D_F = \int_0^1 [(T_g T_f)^{-1} T_g \delta f(x, y) + (S_f S_g)^{-1} S_f \delta g(x, y)]_{x=y} dx$$

$$= \int_0^1 [T_f^{-1} \delta f(x, y) + S_g^{-1} \delta g(x, y)]_{x=y} dx$$

ou

$$\delta \log D_F = \delta \log D_f + \delta \log D_g.$$

Il s'ensuit que

$$\log D_F - \log D_f - \log D_g$$

ne dépend point des fonctions f et g. Alors, parce que pour $f = g = 0$ on a $D_F = D_f = D_g = 1$, on arrive au théorème

$$D_F = D_f D_g. \tag{21}$$

§ 5. *Développements divers.*

13. Nous avons vu que la fonction

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{D_f\binom{\xi}{\eta}}{D_f}$$

satisfait à l'équation

$$\varphi(\xi, \eta) + \int_0^1 f(\xi, \tau)\varphi(\tau, \eta)dt = f(\xi, \eta). \tag{4_1}$$

Cherchons un développement de la fonction $\varphi(\xi, \eta)$ de la forme

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_1(\xi, \eta) - \varphi_2(\xi, \eta) + \varphi_3(\xi, \eta) + \cdots \tag{22}$$

où $\varphi_n(\xi, \eta)$ soit de dimension n par rapport à f.

Introduisant cette série dans l'équation (4_1) on trouve, en égalant à zéro la somme des termes de la même dimension par rapport à f, les équations

$$\varphi_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta),$$

$$\varphi_n(\xi, \eta) = \int_0^1 f(\xi, \tau)\varphi_{n-1}(\tau, \eta)dt \qquad {\scriptstyle (n=2,3,\ldots)}$$

d'où il vient

$$\varphi_n(\xi, \eta) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\xi, \tau_1)f(\tau_1, \tau_2)\cdots f(\tau_{n-1}, \eta)d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1}.$$

Le développement ainsi trouvé converge pourvu que la limite supérieure de f soit assez petite.

Rappelons maintenant la formule (6) que nous pouvons écrire pour $n = 1$

$$\lambda\frac{d \log D_{\lambda f}}{d\lambda} = \int_0^1 \varphi(\xi, \xi)d\xi$$

nous aurons, en introduisant pour $\varphi(\xi, \xi)$ l'expression (22), la formule

$$\log D_{\lambda f} = \lambda \int_0^1 f(x, x) dx - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) f(y, x) dx dy + \text{ etc.}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_{n-1}, x_n) f(x_n, x_1) dx_1 \ldots dx_n$$

ou bien, si la série dans le second membre converge pour $\lambda = 1$

$$\log D_f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_{n-1}, x_n) f(x_n, x_1) dx_1 \ldots dx_n.$$

§ 6. *Le cas où $f(x, y)$ devient infini de telle manière que $(x - y)^a f(x, y)$ reste fini.*

14. Soit $f(x, y)$ une fonction finie et intégrable, $i(x, y)$ une fonction telle que $(x - y)^a i(x, y)$ soit fini et intégrable. Supposons que D_f soit nul ainsi que ses mineurs jusqu'à l'ordre n. Soit de plus

$$S_f S_i = S_i S_f,$$

on a évidemment

$$S_i \Phi_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\lambda\mu} \Phi_\mu(x), \qquad (\lambda = 1, \ldots, n) \tag{23}$$

$\Phi_1(x) \ldots \Phi_n(x)$ étant les n solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$S_f \varphi(x) = 0.$$

Soit

$$T_f \varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(y, x) \varphi(y) dy$$

nous aurons

$$T_i \Psi_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\lambda\mu} \Psi_\mu(x) \qquad (\lambda = 1, \ldots, n) \tag{24}$$

$\Psi_1(x) \ldots \Psi_n(x)$ étant les n solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$T_f \Psi(x) = 0.$$

Je dis que le déterminant des coefficients $p_{\lambda\mu}$ est égal à celui des coefficients $q_{\lambda\mu}$.

Je le démontre en supposant que le déterminant des quantités

$$c_{\lambda\mu} = \int_0^1 \Phi_\lambda(x)\Psi_\mu(x)dx$$

soit différent de zéro, un simple raisonnement par continuité permettant évidemment d'étendre la proposition au cas où le déterminant est nul.

Observant qu'on a identiquement

$$\int_0^1 \Psi(x)S_i\Phi(x)dx = \int_0^1 \Phi(x)T_i\Psi(x)dx$$

on obtient en tenant compte des équations (23) et (24)

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu\mu}p_{\lambda\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu}q_{\mu\nu} \qquad (\lambda,\mu=1,\ldots,n)$$

d'où résulte immédiatement le résultat cherché.

15. Désignons par $i(x,y)$ une fonction à laquelle appartient la transformation S_i. Nous allons chercher les conditions dans lesquelles il existe une transformation inverse de S_i en supposant que $i(x,y)$ devient infini de telle manière que $(x-y)^\alpha i(x,y)$ reste fini, α étant un nombre inférieur à l'unité.

Posons

$$i_\nu(x,y) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 i(x,t_1)i(t_1,t_2)\ldots i(t_{\nu-1},y)dt_1\ldots dt_{\nu-1}$$

et

$$k(x,y) = -i(x,y) + i_2(x,y) - \ldots + (-1)^{n-1}i_{n-1}(x,y)$$

nous aurons

$$S_kS_i = S_iS_k = S_f$$

où

$$f(x,y) = (-1)^{n-1}i_n(x,y).$$

Si on a choisi n tel que

$$n > \frac{1}{1-\alpha}$$

$i_n(x,y)$ ne devient plus infini.

Pour le démontrer observons qu'on peut écrire

$$(25) \qquad \int_0^1 \frac{dt}{|x-t|^\alpha |t-y|^\beta} < \frac{\Psi(\alpha, \beta)}{|x-y|^{\alpha+\beta-1}}$$

où $\Psi(\alpha, \beta)$ est une fonction finie tant que

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad \alpha + \beta < 1.$$

L'inégalité (25) se démontre facilement en faisant dans l'intégrale le changement de variable

$$t = x + (y - x)s.$$

L'application répétée de l'inégalité (25) par rapport à l'inégalité

$$|i(x, y)| < \frac{a}{|x-y|^\alpha}$$

conduit facilement au résultat que

$$|i_\nu(x, y)| < \frac{a_\nu}{|x-y|^{\nu\alpha-\nu+1}}$$

tant que

$$\nu\alpha - \nu + 1 < 0$$

c'est à dire tant que

$$\nu < \frac{1}{1-\alpha}.$$

Soit

$$\frac{1}{1-\alpha} - 1 < n - 1 < \frac{1}{1-\alpha}$$

nous aurons

$$|i_n(x, y)| < \int_0^1 \frac{a_{n-1} a \,.\, dt}{|x-t|^{(n-1)\alpha-n+2} |t-y|^\alpha}.$$

De cette inégalité il vient qu'il existe une limite supérieure finie pour $i_n(x, y)$.

16. Les résultats ainsi obtenus s'étendent prèsque immédiatement à des transformations plus générales

$$S_i\varphi(x_1\ldots x_n) = \varphi(x_1\ldots x_n) + \int_0^1\ldots\int_0^1 i(x_1\ldots x_n\,;\,y_1\ldots y_n)\varphi(y_1\ldots y_n)dy_1\ldots dy_n$$

en admettant que $i(x_1\ldots x_n\,;\,y_1\ldots y_n)$ devient infini de manière que

$$r^a.\,i(x_1\ldots y_1\ldots)$$

reste fini, a étant un nombre convenablement choisi, inférieur à n, et r la distance des points dont les coordonnées cartésiennes sont $x_1\ldots x_n$ et $y_1\ldots y_n$ respectivement.

On a en effet

$$\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - y_\nu)^2 > n\sqrt[n]{\prod_{\nu=1}^{n}(x_\nu - y_\nu)^2}$$

ou

$$r \geqq \sqrt{n}\prod_{\nu=1}^{n}|x_\nu - y_\nu|^{\frac{1}{n}}.$$

Par conséquent il existe un nombre a tel que

$$|i| \leqq \frac{a}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}|x_\nu - y_\nu|^{\frac{a}{n}}}.$$

Nous définissons de la même manière qu'auparavant les fonctions i_ν, c'est à dire nous posons

$$i_\nu(x_1\ldots x_n) = \int_0^1\ldots\int_0^1 i(x_1\ldots x_n\,;\,t_1\ldots t_n)\,i_{\nu-1}(t_1\ldots t_n)dt_1\ldots dt_n.$$

Par un raisonnement analogue à celui employé dans le cas précédent nous arrivons à l'inégalité

$$|i_\lambda(x_1\ldots x_n\,,\,y_1\ldots y_n)| < \frac{a_\nu}{\{\prod|x_\nu - y_\nu|\}^{\frac{\lambda a}{n}-\lambda+1}};$$

et de cette inégalité nous tirons le résultat que i_λ ne devient infini si $\lambda > \dfrac{1}{1-\frac{a}{n}}$.

17. Pour montrer comment ces résultats s'appliquent à la résolution d'une équation

$$S_i\varphi(x) = \psi(x)$$

je me restreins, pour abréger l'écriture, au cas où i ne dépend que de deux variables.

Appliquant aux deux membres de l'équation proposée la transformation S_k, nous aurons

$$S_k S_i\varphi(x) = S_f\varphi(x) = S_k\psi(x).$$

Ici f et $S_k\psi(x)$ sont des fonctions finies et évidemment aussi intégrables. Par suite nous pouvons appliquer à l'équation

$$S_f\varphi(x) = S_k\psi(x) \tag{26}$$

les procédés exposés dans le paragraphe 2.

Supposons, pour nous placer dans l'hypothèse la plus générale, que D_f soit nul ainsi que ses mineurs jusqu'à l'ordre n et employons les notations du § 2.

Nous avons en appliquant aux deux membres de l'équation (7) la transformation *pseudo-inverse* de S_f

$$S_g S_f\varphi(x) = S_F\varphi(x) = S_g S_k\psi(x)$$

ou

$$\varphi(x) = S_g S_k\psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu(x).$$

S'il existe une solution de l'équation proposée on peut déterminer les coefficients c_ν de manière que $S_i\varphi(x)$ soit égale à $\psi(x)$.

18. Parmi les cas où cette détermination est possible il y a un qui me paraît mériter l'attention. C'est le cas où l'équation

$$S_i\varphi(x) = 0$$

n'admet que la solution

$$\varphi(x) = 0.$$

Nous avons évidemment

$$S_i S_f = S_f S_i.$$

Par conséquent

$$S_i \Phi_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{n} p_{\lambda\mu} \Phi_\mu(x)$$

où le déterminant des coefficients $p_{\lambda\mu}$ est différent de zéro, les fonctions Φ_μ étant linéairement indépendantes et l'équation

$$S_i \varphi(x) = 0$$

n'admettant que la solution $\varphi(x) = 0$.

Le déterminant des $p_{\lambda\mu}$ n'étant pas nul le déterminant des $q_{\lambda\mu}$ est aussi différent de zéro. Il s'ensuit que l'équation

$$T_i \varphi(x) = 0$$

n'admet que la solution $\varphi(x) = 0$ et que l'on a

$$(27) \qquad \left. \begin{aligned} S_k \Phi_\lambda(x) &= 0, \\ T_k \Psi_\lambda(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

Cela posé, mettant

$$\varphi_0(x) = S_g S_k \psi(x)$$

nous aurons

$$S_f \varphi_0(x) = S_f S_g S_k \psi(x) = S_0 S_k \psi(x)$$

$$= S_k \psi(x) - \sum_{\nu=1}^{n} f(x, \eta_\nu) \int_0^1 \psi_\nu(x) S_k \psi(x) dx.$$

Or on a identiquement

$$\int_0^1 \psi_\nu(x) S_k \psi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) T_k \psi_\nu(x) dx = 0.$$

Par suite

$$S_f \varphi_0(x) - S_k \psi(x) = 0$$

ou

$$S_k\big(S_i \varphi_0(x) - \psi(x)\big) = 0$$

d'où on conclut

$$S_i \varphi_0(x) = \psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x)$$

les a_ν étant des nombres connus.

Posant maintenant

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu(x)$$

on obtient

$$S_i\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} p_{\lambda\nu} c_\lambda \Phi_\nu(x).$$

Or, le déterminant des coefficients $p_{\lambda\nu}$ n'étant pas nul on peut évidemment déterminer les c_ν de manière que l'on ait

$$S_i\varphi(x) = \psi(x).$$

C. Q. F. D.

Fac-similé d'une lettre d'Abel.

Nous publions ici en fac-similé la dernière page d'un manuscrit d'ABEL composé de quatre pages et contenant le mémoire: *Notes sur quelques formules elliptiques* (voir CRELLE, t. 4, p. 85—93, HOLMBOE, t. 1, p. 299—308, SYLOW et LIE, t. 1, p. 466—477).

La lettre est absolument inédite. Les annotations d'une écriture qui n'est pas celle d'ABEL sont de la main de CRELLE.

Le manuscrit de même que celui que nous avons publié au tome 26 de ce journal fait partie de la collection MANZONI. Dans le catalogue de vente, il porte le numéro 3 et il y est indiqué qu'il a appartenu à la collection Libri. La date 25 septembre 1828 a été supprimée par CRELLE. La raison a dû en être que le § 1 du second mémoire *Recherches sur les fonctions elliptiques*, publié sous le titre *Théorèmes sur les fonctions elliptiques* et portant la date 27 août 1828, n'a paru que dans le cahier qui suit celui où ont paru les *Notes*. La lettre semble d'un très grand intérêt en raison de ses indications sur les derniers mois de la vie d'ABEL.

on pourra prouver qu'on aura en même temps

$$19\ldots\quad E(b,c') = k\cdot\sqrt{\mu}\cdot E(c',b)$$

où k est un autre nombre rationnel, immédiatement ce théorème:

Si l'équation différentielle

$$19\ldots\quad \frac{dy}{\sqrt{A - B\cdot y^2 + C\cdot y^4}} = a\,\frac{dx}{\sqrt{A + B x^2 + C x^4}}$$

est intégrable algébriquement, il faut que le coefficient a soit égal à la racine carrée d'un nombre rationnel et positif, en supposant que A, B, C, a soient réelles; on pourra trouver une infinité pour A, B, C.

Nous finirons ces remarques d'une formule curieuse qu'on tire de l'équation (20)

$$(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\cdots = $$

En y changeant c en b, b en c et r en q donne

$$(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots = $$

En comparant ces formules on voit

$$50\ldots\quad \frac{1}{\sqrt[24]{r}}\cdot(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\cdots = \frac{1}{\sqrt[24]{q}}(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots$$

toutes les fois que les quantités q et r sont liées entre elles par

$$\log r\cdot\log q = \pi^2$$

Il existe un grand nombre de relations entre q et r, ~~mais elles ne paraît donc ici être le moment~~ par exemple

$$\sqrt[4]{\log(\tfrac{1}{r})}\cdot\left(\tfrac{1}{2} + r + r^4 + r^9 + r^{16} + \cdots\right) = \sqrt[4]{\log(\tfrac{1}{q})}\ldots$$

qui est due à Mons. Cauchy (Exercices …

On pourra la déduire de la formule

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$$

donnée par M. Jacobi en y changeant …

Christiania

… so habe ich vor einigen Tagen erhalten. Es hat mir um so [illegible] gemacht [illegible] erwartet hatte. — Ich hatte schon [illegible] gern die Gelegenheit zur Sendung benutzen. — Aber die Hoffnung wegen meiner [illegible] Freund und naher Lehrer [illegible] für Ihre Bemühungen. — Aber ich [illegible] abgemacht, [illegible] nicht, [illegible] so bald möglich; denn wenn es [illegible] so muss ich darum bald sagen [illegible] allein ich kann für keinen Schritt thun [illegible] bitte gewiss Sie mir doch. — [illegible] dass Sie sich die Mühe gegeben haben [illegible] Briefen von Jacobi und Legendre [illegible] mit welcher [illegible] ich es [illegible] genau zu viel. Ich sehe daß er auf einen andern Weg als ich [illegible] formation genommen, aber [illegible] gefunden hat so begreife ich [illegible] ist, und ich bin sehr neugierig [illegible] zu kommen. — Sie müssen ihn doch zu kennen [illegible] ist [illegible] daß er [illegible] ist. — Die obigen Bemerkungen [illegible] Functionen bitte ich Sie gefälligst [illegible] zu wollen. Hätten Sie vielleicht [illegible] übrig. Es ist ja nicht viel [illegible] Précis d'une théorie des fonctions [illegible] wollen freut mich sehr. Ich werde mich [illegible] Abhandlung so deutlich und gut als möglich [illegible] und ich hoffe daß Sie mir gelingen soll. [illegible] wäre daß [illegible] mit dieser Abhandlung [illegible] Gleichungen den Anfang zu machen. [illegible] Bitte an Sie. Denn [illegible] glaube [illegible] Functionen mehr Interesse haben wird [illegible] meine Gesundheit mir [illegible] erlauben [illegible] in einiger Zeit zu befassen. Ich bin [illegible] so daß ich Sie bitte [illegible] bin so [illegible] mir doch, wie der [illegible] sehr nachtheilig [illegible] die elliptischen Functionen. Wenn [illegible] Abhandlung über die Gleichungen [illegible] haben sollen Sie sie haben) so würde [illegible] Übrigens [illegible] nachfolgen [illegible] wenn ich Sie [illegible] die Abtheilungen [illegible] elliptische Functionen [illegible] für den ersten möchte ich gern bloß elliptische [illegible] mir doch, ich bitte, Ihre Meinung.

Ihr ergebenster N. Abel

On pourra ajouter qu'on aura en une ...

49 ... $E(c_1, c') = k\sqrt{\mu}\cdot E(c, \ldots)$

où k est un autre nombre rationnel ... immédiatement ce théorème

Si l'équation différentielle

49 ... $\frac{dy}{\sqrt{A - B\cdot y^2 + C\cdot y^4}} = a\frac{dx}{\sqrt{A + B x^2 + C x^4}}$

est intégrable algébriquement il faut que le coefficient a soit égal à la racine ... rationnel est positif, en supposant que A, B, C, a soient réelles; on pourra trouver une infinité ... pour A, B, C.

Nous finirons ces remarques par la démonstration d'une formule curieuse qu'on ... tion (20)

$$(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\cdots =$$

En y changeant c en b, b se ... en q donc

$$(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots =$$

En comparant ces formules on ...

50 ... $\frac{1}{\sqrt[24]{r}}\cdot(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\cdots = \frac{1}{\sqrt[24]{q}}(1+ \ldots$

toutes les fois que les quantités ... que l'unité est liée entre elles par

$$\log r \cdot \log q = \pi^2$$

Il existe un grand nombre de rel... q et r, ~~mais celle-ci paraît ...~~ ~~si ce n'est la ...~~ par exemple,

$$\sqrt[4]{\log(1/r)}\left(\tfrac{1}{2} + r + r^4 + r^9 + r^{16} + \cdots\right) = \sqrt[4]{\log(1/q)} \ldots$$

qui est due à M. Cauchy (Exercices ...

On pourra la déduire de la for...

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$$

donné par M. Jacobi en y changeant ...

Christiania

... 10 ... habe ich vor einigen Tagen erhalten. Es hat mir um so größere Freude gemacht, ... erwartet hätte. — Ich hätte Ihnen sehr gern die Gelegenheit zur Sendung benutzt. — Aber die Hoffnung morgen meine ~~[illegible]~~ ... werden für ... — Aber ich ... abgemacht, ... nicht, mir ... so bald möglich; denn wenn es ... so muß ich darin bald sagen meine ... allein ich kann für keinen Schritt ... Diese bitte verzeihen Sie mir doch. — ... daß Sie sich die Mühe gegeben haben ... aus den Briefen von Jacobi und Legendre zu drucken mit welchem ... ich es ... zu viel. Ich sehe ~~[illegible]~~ daß er auf einem andern Weg als ich ... Transformation genommen, aber ~~meine~~ ... gefunden hat so begreife ich ... ist, und ich bin sehr neugierig ... zu kennen. — Sie wissen ihn doch zu kennen, denn es ist klar daß er ... ist. — Die obigen Bemerkungen ... Functionen bitte ich ... gefälligst ... zu wollen. Hätten Sie vielleicht im ... übrig. Es ist ja nicht viel ... Sie den Précis d'une théorie des fonctions ... wollen freut mich sehr. Ich werde mich ... Abhandlung so deutlich und gut als mir ... und ich hoffe daß Sie mir gelungen finden. Es wäre daß letzte mit dieser Abhandlung ... Gleichungen den Anfang zu machen. ... bitte an Sie. Denn ... ~~glauben~~ ... Functionen mehr Interesse haben wird ... meine Gesundheit ... erlauben ... in einiger Zeit zu befassen. Ich bin ..., so daß ich das bitte ... möchte, und ... bin so ~~[illegible]~~ mir doch, wie die ... sehr nachtheilig sagen. Man ... (Erzählungen ... mehr ... die elliptischen Functionen. Wenn ... Abhandlung über die Gleichungen ... sollen Sie sie haben) so werde ... anfangen. Übrigens sollen ... nachfolgen und, wenn ~~ich~~ Sie nichts ... ~~[illegible]~~ die Abtheilungen so klein ... etwas über elliptische Functionen ... vorkommt. Nur für den ersten möchte ich gern bloß elliptische ... ~~[illegible]~~ ... mir doch, ich bitte, Ihre Meinung.

Ihr ergebenster N. Abel

L'évolution de la Mécanique.

Sous ce titre, M. P. DUHEM, professeur de Physique théorique à la Faculté des Sciences de Bordeaux, publie, dans la *Revue générale des Sciences*, une série d'articles fort remarquables, où il étudie successivement:

I. Les diverses sortes d'explications mécaniques;
II. La mécanique analytique;
III. Les théories mécaniques de la Chaleur et de l'Electricité;
IV. Le retour à l'Atomisme et au Cartésianisme
V. Les fondements de la Thermodynamique;
VI. La statique générale et la dynamique générale;
VII. Les branches aberrantes de la Thermodynamique.

Tous ceux qu'intéresse le mouvement des idées dans ce domaine de la philosophie naturelle liront avec intérêt et avec fruit les substantielles et profondes études de M. P. DUHEM.

